《现代数学基础丛书》编委会

现代数学基础丛书　135

非线性椭圆型方程

王明新　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了二阶线性椭圆算子的特征值理论，半线性椭圆型方程和方程组的上下解方法及其应用，拓扑度理论和分支理论及其应用，方程组的解耦方法，Nehari 流形方法及其应用，p-Laplace 算子的特征值理论和 p-Laplace 方程(组)的上下解方法及其应用.

本书选题先进、内容新颖丰富，大部分内容取自同行近几年发表的论文. 尽可能地做到了自封、系统、循序渐进，强调基础理论的同时，注重具体应用. 本书深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题. 学完本书，读者就可以直接进入相关研究领域，开展研究工作.

本书可作为微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学、控制论与相关理工科方向研究生的教材和教学参考书，也可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非线性椭圆型方程/王明新著. —北京：科学出版社，2010

(现代数学基础丛书；135)

ISBN 978-7-03-028263-7

Ⅰ. 非… Ⅱ. 王… Ⅲ. 非线性椭圆型方程-研究 Ⅳ. O175.25

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 130947 号

责任编辑：王丽平 杨 然 张 扬／责任校对：张小霞

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2010 年 7 月第一次印刷 印张：20 1/2

印数：1-2 500 字数：396 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前 言

椭圆型方程的研究领域宽广, 内容丰富, 体系庞大, 问题繁多, 方法多样. 用一本书系统完整地介绍椭圆型方程研究领域中的各种类型的问题和方法是不可能的. 鉴于上述原因和可读性, 本书在尽可能自封的前提下, 介绍了二阶线性椭圆算子的特征值理论, 半线性椭圆型方程和方程组的上下解方法及其应用, 拓扑度理论和分支理论及其应用, 方程组的解耦方法, Nehari 流形方法及其应用, p–Laplace 算子的特征值理论和 p–Laplace 方程 (组) 的上下解方法及其应用.

本书的定位是为研究生和青年学者提供一本非线性椭圆型方程的教材和参考书, 力求用较短的篇幅, 尽可能地介绍非线性椭圆型方程研究领域的基本问题和方法.

本书的主导思想是着重介绍偏微分方程方法, 所以没有具体介绍非线性泛函分析中的变分方法, 更没有涉及临界点理论、单调映射、集值映射等问题. 由于特征值问题研究中的关键一步是泛函的极值问题, 顾及到后面的应用以及自封性, 在第 1 章的预备知识部分, 简要介绍了 Banach 空间上的微分学和泛函的无条件极值的存在性.

自然科学和工程技术中的许多问题都与特征值 (本征值) 有关, 特别地, 二阶半线性 (拟线性) 椭圆型方程和方程组的边值问题正解的存在性, 强烈地依赖于一个与其对应的特征值问题的主特征值 (第一特征值, 最小特征值). 在第 2 章中, 我们系统介绍二阶线性椭圆算子的特征值理论. 内容包括非散度型二阶线性椭圆算子的主特征值及其对应的特征函数, 主特征值、最大值原理与正的严格上解之间的关系, 散度型二阶线性椭圆算子的特征值的极值性质、无界性和完备性、关于区域和算子的系数的连续依赖性、主特征值与谱半径之间的关系, 非完全耦合的二阶线性椭圆型方程组的特征值, 以及一个一般形式的特征值问题 $\mathscr{L}u=\lambda p(x)u,\ x\in\Omega;\ \mathscr{B}u=0,\ x\in\partial\Omega$. 本章的最后, 作为特征值的完备性定理的第一个应用, 证明了空间 $H^1(\Omega)$ 上的 Poincaré 不等式并给出了最佳常数. 作为第二个应用, 证明了齐次 Neumann 边值问题 $-\Delta u=f(x),\ x\in\Omega;\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0,\ x\in\partial\Omega$ 可解的充分必要条件是 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x=0$. 作为第三个应用, 给出了特征值的一个计算公式.

上下解方法是研究非线性偏微分方程解的存在性和估计的一个重要方法, 直观而又初等, 问题的核心是设法构造合适的上下解, 技巧性很强. 第 3 章介绍二阶半线性椭圆型方程和方程组的上下解方法 (包括弱上下解方法, 无界区域上的上下解

方法) 及其应用. 首先给出了完全非线性方程的古典解的比较原理和一个一般形式的比较原理及正解的唯一性. 其次, 建立了方程式和方程组的上下解方法, 并给出了几个应用例子. 特别地, 对于退化的 Logistic 方程, 还运用上下解方法讨论了正解的存在性和渐近性, 运用摄动方法讨论了解的模式 (pattern). 最后讨论了弱上下解方法和无界区域上的上下解方法.

第 4 章简要介绍了拓扑度理论 (包括锥上的拓扑度) 和分支理论中的一些基本结果. 第 5 章利用锥上的拓扑度和分支理论, 介绍了两个带有齐次 Dirichlet 边界条件的半线性方程组的正解的存在性、分支与稳定性. 第 6 章结合两个具体例子, 介绍了扩散导致的模式 (非常数正解) 的研究方法.

一些具有特殊结构的椭圆型方程组的边值问题, 可以转化成方程式的边值问题来研究, 这就是所谓的解耦方法. 第 7 章结合一个具体例子来介绍这种方法.

目前, Nehari 流形已被广泛应用于椭圆型方程的边值问题解的存在性、多解性、不存在性, 以及发展方程整体解的存在性与不存在性的研究中. 第 8 章以一个二阶半线性椭圆型方程的边值问题为例, 介绍 Nehari 流形以及它的应用.

因为当 $\nabla u = 0$ 时, p–Laplace 方程是一个退化 ($p > 2$) 的或者具有奇性 ($p < 2$) 的拟线性方程, 它与半线性方程有重要差别. 半线性方程的许多重要性质对于 p–Laplace 方程而言不一定成立. 第 9 章介绍了 p–Laplace 算子的特征值理论和 p–Laplace 方程 (组) 的上下解方法及其应用.

为了便于读者查阅, 在附录中我们列出了一些关于 Sobolev 空间和线性椭圆型方程的基本结论.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些书籍和论文, 请参阅所附的参考文献. 本书的讲义稿, 作者在哈尔滨工业大学、东南大学和厦门大学为研究生讲授过多次. 本书的出版得到国家自然科学基金 (No.10471022, No.10771032), 哈尔滨工业大学科研基金 (AUGA1860000310) 和哈尔滨工业大学优秀团队支持计划的资助. 杜玲珑同学、张艳芳同学、李慧玲博士、陈玉娟博士和吕广迎博士演算了本书的部分内容, 我的其他几位研究生和哈尔滨工业大学、东南大学、厦门大学以及哈尔滨师范大学学习该课程的研究生和青年教师, 对本书的初稿都提出了许多宝贵的意见和修改建议, 在此一并致谢. 鉴于作者学识有限, 疏漏和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作　者

2010 年 6 月

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

鉴于本书没有具体介绍变分方法, 而研究特征值问题的关键一步是泛函的极值问题, 又顾及到后面的应用以及本书的自封性, 本章简要介绍 Banach 空间上的微分学和泛函的无条件极值的存在性.

贯通全书, 我们用 $f_k \longrightarrow f$ 表示 f_k 强收敛于 f, 用 $f_k \rightharpoonup f$ 表示 f_k 弱收敛于 f. 对于集合 A 与 B, 用 $d(A,B)$ 表示 $\mathrm{dist}(A,B)$, 即集合 A 与 B 之间的距离 (A 也可以是一个点).

1.1　Banach 空间上的微分学

设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, Ω 是 X 中的一个开集, 映射 $f:\Omega \longrightarrow Y$ 连续. 记 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是 X 到 Y 的有界线性算子构成的集合.

1.1.1　Fréchet 导数

定义 1.1.1　*称 f 在点 $x_0 \in \Omega$ 处是 Fréchet 可微的, 如果存在 $\mathcal{A} \in \mathscr{B}(X,Y)$, 使得*

$$\|f(x_0+u) - f(x_0) - \mathcal{A}u\| = o(r), \quad \text{当 } \|u\| \leqslant r \longrightarrow 0 \text{ 时}.$$

算子 $\mathcal{A}$ 称为 f 在 x_0 处的 Fréchet 导数.

下面我们列出 Fréchet 导数 $\mathcal{A}$ 的一些性质:

(1) 如果 $\mathcal{A}$ 存在, 一定唯一, 记为 $f_x(x_0), Df(x_0)$ 或者 $f'(x_0)$;

(2) 如果 $Df(x): x \in \Omega \longrightarrow \mathscr{B}(X,Y)$ 是连续映射, 则称 $f \in C^1(\Omega)$. 用归纳法可以定义 C^p 映射, $p = 1, 2, \cdots$. 映射 $f \in C^p(\Omega)$ 是指

$$D^p f(x) := D(D^{p-1}f)(x) \in \mathscr{B}(X, \mathscr{B}(X, \cdots, \mathscr{B}(X, Y\underbrace{) \cdots)))}_{p}, \quad \forall\, x \in \Omega,$$

$$D^p f(x) : x \in \Omega \longrightarrow \mathscr{B}(X, \mathscr{B}(X, \cdots, \mathscr{B}(X, Y\underbrace{) \cdots)))}_{p} \text{ 关于 } x \text{ 连续}.$$

(3) 复合映射的导数: 设 X, Y, Z 是三个 Banach 空间, 开集 $U \subset X$, $V \subset Y$, 映射 $f: U \longrightarrow Y$, $g: V \longrightarrow Z$. 又设 $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0) \in V$, f 和 g 分别在 x_0 和 y_0 处 Fréchet 可微. 那么 $g \circ f$ 在 x_0 处也 Fréchet 可微, 并且 $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$.

引理 1.1.1　假设 $f: X \longrightarrow Y$ 是 C^1 的且在点 x_0 的邻域内是紧的, 那么 $f'(x_0)$ 也是紧的.

证明　如果 $\mathcal{A} = f'(x_0)$ 不是紧的, 则存在 $\{x_i\}$, $\|x_i\| = 1$, $\varepsilon > 0$, 使得

$$\|\mathcal{A}x_i - \mathcal{A}x_j\| \geqslant \varepsilon, \quad \forall\, i \neq j.$$

取 $\delta > 0$ 充分小, 使

$$\|f(x_0 + \delta x_i) - f(x_0) - \delta \mathcal{A} x_i\| \leqslant \varepsilon\delta/4, \quad \forall\, i.$$

不妨认为 $x_0 = 0$. 那么当 $i \neq j$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\varepsilon\delta/2 &\geqslant \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j) - \delta\mathcal{A}x_i + \delta\mathcal{A}x_j\| \\
&\geqslant \|\delta\mathcal{A}x_i - \delta\mathcal{A}x_j\| - \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\| \\
&\geqslant \varepsilon\delta - \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\|,
\end{aligned}$$

即

$$\|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\| \geqslant \varepsilon\delta/2, \quad \forall\, i \neq j.$$

这与 f 的紧性条件矛盾. 证毕.

中值公式　假设在凸开集 U 上 $f \in C^1$, 那么对任意的 $x, x' \in U$, 成立

$$\begin{aligned}
f(x') - f(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx' + (1-t)x)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f_x(tx' + (1-t)x)\mathrm{d}t(x' - x).
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

1.1.2　Gâteaux 导数

定义 1.1.2　设 $f: \Omega \subset X \longrightarrow Y$, $x_0 \in \Omega$. 若对任意的 $h \in X$, 当 $|t|$ 适当小时都有 $x_0 + th \in \Omega$, 并且极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \tag{1.1.2}$$

存在, 则称 f 在 x_0 处 Gâteaux 可微, 称其极限值是 f 在 x_0 处沿方向 h 的 Gâteaux 微分, 记作 $f_G(x_0)h$, 即

$$f_G(x_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

如果 f 在 Ω 的每一点处都是 Gâteaux 可微的, 则称 f 在 Ω 上 Gâteaux 可微.

若 $f_G(x_0) \in \mathscr{B}(X, Y)$, 则称 f 在 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 导数.

关于 Gâteaux 导数, 也有与 Fréchet 导数完全相同的复合映射的求导公式.

定理 1.1.1 设 X, Y 是 Banach 空间, 开集 $\Omega \subset X$, $f: \Omega \longrightarrow Y$, $x_0 \in \Omega$.

(1) 如果 f 在 x_0 处 Fréchet 可微, 则 f 必在 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 导数, 并且 $f'(x_0) = f_G(x_0)$, 即 f 在 x_0 处的 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数相同.

(2) 如果 f 在 x_0 的邻域内具有有界线性的 Gâteaux 导数, 并且 Gâteaux 导数 $f_G(x)$ 在 x_0 处连续, 那么 f 在 x_0 处 Fréchet 可微, 并且两个导数相同.

证明 (1) 由假设条件知, 对于任何 $h \in X$, 当 $|t|$ 适当小时, 有

$$f(x_0 + th) - f(x_0) - tf'(x_0)h = \omega(x_0, th),$$

其中 $\omega(x_0, h)$ 满足

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0,$$

故有

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)h = \frac{\omega(x_0, th)}{t}.$$

因为

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\omega(x_0, th)}{t} \right\| = \lim_{t \to 0} \frac{\|\omega(x_0, th)\|}{\|th\|} \|h\| = 0,$$

所以

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)h.$$

因此 f 必在 x_0 处 Gâteaux 可微, 并具有有界线性的 Gâteaux 导数 $f'(x_0)$.

(2) 因为 Gâteaux 导数 $f_G(x)$ 在 x_0 处连续, 故对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $\|h\| < \delta$ 时, 有

$$\|f_G(x_0 + h) - f_G(x_0)\| < \varepsilon. \tag{1.1.3}$$

下面证明当 $0 < \|h\| < \delta$ 时, 恒有

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\| \leqslant \varepsilon \|h\|. \tag{1.1.4}$$

给定 h 满足 $0 < \|h\| < \delta$. 不妨假设 $f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h \neq 0$ (否则, 上式自然成立). 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $\phi \in Y^*$ 满足 $\|\phi\| = 1$,

$$\phi\big(f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\big) = \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\|. \tag{1.1.5}$$

考察函数

$$\varphi(t) = \phi\big(f(x_0 + th)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

易知 $\varphi'(t) = \phi\big(f_G(x_0+th)h\big)$. 由中值公式, 存在 $\theta \in [0,1]$, 使得 $\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta)$, 即

$$\phi\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) = \phi\big(f_G(x_0+\theta h)h\big). \tag{1.1.6}$$

利用式 (1.1.5)、式 (1.1.6) 和式 (1.1.3) 便推得

$$\begin{aligned}\|f(x_0+h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\| &= \phi\big(f(x_0+h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\big)\\ &= \phi\big(f_G(x_0+\theta h)h - f_G(x_0)h\big)\\ &\leqslant \|\phi\| \cdot \|f_G(x_0+\theta h) - f_G(x_0)\| \cdot \|h\|\\ &= \|f_G(x_0+\theta h) - f_G(x_0)\| \cdot \|h\|\\ &\leqslant \varepsilon\|h\|,\end{aligned}$$

即式 (1.1.4). 故 f 在 x_0 处 Fréchet 可微, 并且 $f'(x_0) = f_G(x_0)$. 证毕.

1.2　无条件局部极值

定义 1.2.1　设 X 是一个 Banach 空间, $\Omega \subset X$, 泛函 $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 称为在 Ω 上是下半连续 (弱下半连续) 的, 如果由 $\Omega \ni x_i \longrightarrow x \in \Omega$ ($\Omega \ni x_i \rightharpoonup x \in \Omega$) 可以推出

$$\liminf_{i\to\infty} f(x_i) \geqslant f(x).$$

称泛函 $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 Ω 上是上半连续 (弱上半连续) 的, 如果由 $\Omega \ni x_i \longrightarrow x \in \Omega$ ($\Omega \ni x_i \rightharpoonup x \in \Omega$) 可以推出

$$\limsup_{i\to\infty} f(x_i) \leqslant f(x).$$

定义 1.2.2　设 X 是一个 Banach 空间, 称泛函 $f: \Omega \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in \Omega$ 处取无条件局部极小值 (无条件局部极大值) 是指, 存在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 对于 $\Omega \cap U(x_0)$ 中的所有 x, 都有

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \leqslant f(x_0)\big).$$

定义 1.2.3　设 X 是一个 Banach 空间, 集合 $\Omega \subset X$, 泛函 $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 有下界. 序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ 称为极小化序列, 如果

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = \inf_{x\in\Omega} f(x).$$

称泛函 f 在 Ω 上是强制的, 如果 Ω 无界并且 $\lim\limits_{\substack{x\in\Omega\\ \|x\|\to\infty}} f(x) = \infty$.

1.2.1 无条件极值存在的必要条件

定理 1.2.1 设 X 是 Banach 空间, 开集 $\Omega \subset X$, 泛函 f 在 $x_0 \in \Omega$ 处取无条件局部极值, 并且 f 在 x_0 处 Gâteaux 可微. 那么, 对于任何 $h \in X$, 都有 $f_G(x_0)h = 0$.

证明 不妨假设 f 在 $x_0 \in \Omega$ 处取无条件局部极小值. 那么存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall\, x \in \Omega \cap U(x_0).$$

给定 $h \in X$. 由于当 $|t|$ 适当小时, $x_0 + th \in \Omega$, 因此函数

$$F_h(t) := f(x_0 + th)$$

对于 $|t|$ 适当小有定义, 并且在 $t = 0$ 处取到极小值. 于是 $F_h'(0) = 0$, 进而有

$$f_G(x_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F_h(t) - F_h(0)}{t} = F_h'(0) = 0.$$

证毕.

1.2.2 无条件极值的存在性

下面的结果是 Weierstrass 定理的推广.

定理 1.2.2 设 X 是 Banach 空间, $\Omega \subset X$ 是弱列紧的序列式弱闭集, 泛函 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 Ω 上是弱下半连续的. 那么 f 在 Ω 上有下界且达到下确界, 即存在 $x_0 \in \Omega$, 使得

$$f(x_0) = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$

证明 若 $c := \inf\limits_{x \in \Omega} f(x) = -\infty$, 则存在 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$, 使得 $f(x_i) < -i$. 因为 Ω 是弱列紧的, 不妨认为 $x_i \rightharpoonup x_0$. 又因为 Ω 是序列式弱闭集, 所以 $x_0 \in \Omega$. 根据 f 的弱下半连续性得, $f(x_0) \leqslant \liminf\limits_{i \to \infty} f(x_i) = -\infty$. 该矛盾说明 f 在 Ω 上有下界, 从而有下确界. 记 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ 是极小化序列, 即 $f(x_i) \longrightarrow c$. 因为 Ω 是弱列紧的序列式弱闭集, 不妨认为 $x_i \rightharpoonup x_0 \in \Omega$. 利用 f 的弱下半连续性得

$$c \leqslant f(x_0) \leqslant \liminf_{i \to \infty} f(x_i) = \lim_{i \to \infty} f(x_i) = c,$$

即 $f(x_0) = c$. 定理得证.

推论 1.2.1 设 X 是一个自反的实 Banach 空间, $K \subset X$ 是序列式弱闭集, f 是 K 上的弱下半连续泛函. 又假设当 K 无界时, f 在 K 上是强制的. 那么 f 在 K 上取到极小值, 即存在 $x_0 \in K$, 使得

$$f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x).$$

证明　先讨论 K 有界的情况. 因为 X 是自反的, 所以 K 是弱列紧的. 由定理 1.2.2 知结论成立.

下面假设 K 是无界的. 因为 f 在 K 上是强制的, 可取 $x^* \in K$ 使得 $M := f(x^*) > 0$, 并且存在 $r > 0$, 当 $x \in K$ 并且 $\|x\| > r$ 时, 有 $f(x) > M$. 因为自反 Banach 空间中的有界闭球是弱列紧的序列式弱闭集, 所以 $\Omega := K \cap \overline{B_r(0)}$ 也是这样的集合. 根据定理 1.2.2, 存在 $x_0 \in \Omega$ 使得 $f(x_0) = \inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$. 显然 $x^* \in \Omega$. 因此当 $x \in K \setminus \Omega$ 时, 有

$$f(x_0) \leqslant f(x^*) = M < f(x).$$

于是

$$f(x_0) = \inf_{x\in K} f(x).$$

推论得证.

定理 1.2.3　*设 X 是一个自反的实 Banach 空间, f 在 X 上是下方有界的弱下半连续泛函. 如果存在一个有界的极小化序列, 那么 f 在 X 上取到极小值.*

证明　由于 f 在 X 上有下界, 故有下确界. 设 $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset X$ 是有界的极小化序列, 即 $f(x_i) \longrightarrow \inf\limits_{x\in X} f(x)$, 并且存在正常数 C, 使得 $\|x_i\| \leqslant C$ 对所有 i 成立. 因为 X 是自反的, 所以 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 是弱列紧的. 不妨认为 $x_i \rightharpoonup x_0 \in X$. 利用 f 的弱下半连续性便知

$$\inf_{x\in X} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \liminf_{i\to\infty} f(x_i) = \lim_{i\to\infty} f(x_i) = \inf_{x\in X} f(x).$$

故有 $f(x_0) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$. 证毕.

1.3　应　　用

如果所讨论的问题中的区域 Ω 是固定的, 为了简化记号, 本书中通常简记 $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)}$, $|f|_{k+\alpha} = |f|_{k+\alpha,\Omega} = \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})}$.

上节的结果将在后面的特征值问题的研究中多次被用到. 本节先给出一个在拟线性边值问题的非负非平凡解的存在性方面的应用.

设 $p > 1$, 定义 p^*:

$$p^* = \frac{np}{n-p} \text{ 若 } p < n, \quad p^* = \infty \text{ 若 } p \geqslant n.$$

考察拟线性方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界光滑区域, $p>1$, $1\leqslant q<p^*$, $q\neq p$, Δ_p 是 p-Laplace 算子: $\Delta_p u=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

函数 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 称为问题 (1.3.1) 的弱解, 如果

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=\int_\Omega |u|^{q-2}u\phi\mathrm{d}x,\quad \forall\,\phi\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.3.2}$$

根据 Poincaré 不等式, $\|\nabla u\|_p$ 是空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的范数. 利用嵌入定理, 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 紧嵌入到空间 $L^q(\Omega)$, 故存在正常数 C, 使得

$$\|u\|_q\leqslant C\|\nabla u\|_p,\quad \forall\, u\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.3.3}$$

定义

$$A(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x,\quad B(u)=\frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x,$$

$$\mathscr{V}=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega):B(u)=1\right\}.$$

定理 1.3.1 *问题 (1.3.1) 至少存在一个非负非平凡解.*

证明 首先证明集合 $\mathscr{V}$ 是序列式弱闭的. 假设 $u_m\in\mathscr{V}$, 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_m\rightharpoonup u$. 那么序列 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界, 故在 $L^q(\Omega)$ 中是紧的. 于是存在子列 $\{u_{m_i}\}_{i=1}^\infty\subset\{u_m\}_{m=1}^\infty$, 在 $L^q(\Omega)$ 中 $u_{m_i}\longrightarrow u$. 又因为 $B(u_{m_i})=1$, 所以 $B(u)=1$, 即 $u\in\mathscr{V}$.

显然在集合 $\mathscr{V}$ 上 $A(u)$ 是强制的和弱下半连续的 (范数的弱下半连续性, 见习题 1.2).

由推论 1.2.1 知, 存在 $u_0\in\mathscr{V}$, 使得

$$A(u_0)=\inf_{u\in\mathscr{V}}A(u):=\sigma.$$

再由式 (1.3.3), 存在常数 $\alpha>0$, 使得

$$A(u)\geqslant\alpha,\quad \forall\, u\in\mathscr{V},$$

因而 $\sigma\geqslant\alpha>0$.

由于 $A(u)$ 和 $B(u)$ 在 u_0 点都是 Fréchet 可微的, 并且

$$A'(u_0)\phi=\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x,\quad \forall\,\phi\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$B'(u_0)\phi=\int_\Omega |u_0|^{q-2}u_0\phi\mathrm{d}x,\quad \forall\,\phi\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

所以 $A(u)$ 和 $B(u)$ 在 u_0 点也都是 Gâteaux 可微的, 并且其 Gâteaux 导数与 Fréchet 导数相同. 根据 $B(u)$ 的表达式和 Gâteaux 导数的定义知, 对任何 $\mu > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 和 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned} B(\mu u_0 + \varepsilon\mu\phi) &= \mu^q B(u_0 + \varepsilon\phi) \\ &= \mu^q \big[B(u_0) + \varepsilon B'(u_0)\phi + o(\varepsilon)\big] \\ &= \mu^q \big[1 + \varepsilon B'(u_0)\phi + o(\varepsilon)\big]. \end{aligned}$$

显然存在 $0 < \varepsilon_0(\phi) \ll 1$, 当 $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\phi)$ 时, 有 $1 + \varepsilon B'(u_0)\phi + o(\varepsilon) > 0$. 对于每一个这样的 ε, 均存在 $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\mu^q\big[1 + \varepsilon B'(u_0)\phi + o(\varepsilon)\big] = 1,$$

即 $B(\mu u_0 + \varepsilon\mu\phi) = 1$.

对于任意固定的 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 以及按照上面的方式确定的 $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\phi)$ 和 $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \sigma \leqslant A(\mu u_0 + \varepsilon\mu\phi) &= \mu^p A(u_0 + \varepsilon\phi) \\ &= \left(\frac{1}{1 + \varepsilon B'(u_0)\phi + o(\varepsilon)}\right)^{p/q} A(u_0 + \varepsilon\phi) \\ &= \left(1 - \varepsilon\frac{p}{q}B'(u_0)\phi + o(\varepsilon)\right)\big[A(u_0) + \varepsilon A'(u_0)\phi + o(\varepsilon)\big] \\ &= \left(1 - \varepsilon\frac{p}{q}B'(u_0)\phi + o(\varepsilon)\right)\big[\sigma + \varepsilon A'(u_0)\phi + o(\varepsilon)\big] \\ &= \sigma + \varepsilon\left(A'(u_0)\phi - \sigma\frac{p}{q}B'(u_0)\phi\right) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

根据上式以及 ε 的任意性,

$$A'(u_0)\phi = \sigma\frac{p}{q}B'(u_0)\phi.$$

又因为 $A(|u|) = A(u)$, $B(|u|) = B(u)$, 并且 $|u_0| \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 所以

$$|u_0| \in \mathscr{V}, \quad A(|u_0|) = \sigma = \inf_{u\in\mathscr{V}} A(u).$$

同上可得

$$A'(|u_0|)\phi = \sigma\frac{p}{q}B'(|u_0|)\phi.$$

由于 $\sigma > 0$, 若取

$$\lambda = \left(\frac{q}{\sigma p}\right)^{1/(p-q)}, \quad u = \lambda|u_0|,$$

那么 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 并且满足

$$A'(u)\phi = B'(u)\phi, \ \ \forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

即式 (1.3.2). 所以 u 是问题 (1.3.1) 的一个非负非平凡解. 证毕.

注 1.3.1 文献 [1] 利用其他方法证明了定理 1.3.1, 同时文献 [1] 的定理 II 还证明了问题 (1.3.1) 的非负解 $u \in L^\infty(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^d,$$

其中

$$d = \frac{p^* - p}{p^*(p_* - p) - p_*(q - p)} \left[p^* \ln \|u\|_{p^*} + \frac{pp_*}{p_* - p} \ln \left[K(p^* - \alpha^-)\right] \right. \\ \left. + p_* \left(\frac{p}{p_* - p} \right)^2 \ln \frac{p_*}{p} \right],$$

$$\alpha = \frac{p_*(q - p)}{p_* - p}, \quad p_* = \begin{cases} p^* = \dfrac{np}{n - p}, & \text{当 } p < n \text{ 时}, \\ 2p^*, & \text{当 } p = n \text{ 时}, \end{cases}$$

K 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 到 $L^{p^*}(\Omega)$ 的嵌入常数.

利用后面的命题 9.1.1 和命题 9.1.2 还可以推出, 问题 (1.3.1) 的非负解属于 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 并且非负非平凡解一定是正解.

习 题 1

1.1 证明中值公式 (1.1.1).

1.2 证明范数是弱下半连续的.

第 2 章　二阶线性椭圆算子的特征值问题

2.1　引　　言

自然科学和工程技术中的许多问题都与特征值 (本征值) 有关, 特别地, 二阶半线性 (拟线性) 椭圆型方程和方程组的边值问题正解的存在性, 强烈地依赖于一个与其对应的特征值问题的主特征值 (第一特征值、最小特征值). 后面各章节中的多数问题和结论也都与特征值有关. 对于二阶半线性椭圆型方程和方程组的边值问题而言, 这个对应的特征值问题是一个二阶线性椭圆算子的特征值问题, 本章系统介绍这类算子的特征值理论和结果. 在最后一章介绍 p–Laplace 算子的特征值. 本章中的部分内容参考了文献 [2,3].

我们首先介绍一般形式的二阶线性椭圆算子的特征值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u := -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu + c(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, 边界条件是 $\mathscr{B}u = u$ 或者 $\mathscr{B}u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)u$, $b(x)|_{\partial\Omega} \geqslant 0$, ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, λ 是数 (实数或复数). 由于这里的算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 是非对称算子, 所以它的特征值的结构比较复杂. 但是在实际应用中, 通常用到的是问题 (2.1.1) 的主特征值 (第一特征值、最小特征值). 因此我们只讨论问题 (2.1.1) 的主特征值.

其次, 我们考虑特征值问题 (2.1.1) 的一个特殊情形, 即散度型的二阶线性椭圆算子的特征值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u := -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(a_{ij}(x)D_iu\big) + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

其中边界条件是

$$\mathscr{B}u = u, \tag{2.1.3}$$

或者

$$\mathscr{B}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iu\cos(\nu, x_j) + b(x)u, \quad b(x) \geqslant 0. \tag{2.1.4}$$

由于这里的算子 $(\mathscr{L},\mathscr{B})$ 是对称算子, 所以它的特征值具有非常清晰的结构.

定义 2.1.1 使得特征值问题 (2.1.1) (特征值问题 (2.1.2)) 有非零解的数 λ 称为问题 (2.1.1) (问题 (2.1.2)) 的一个特征值, 对应的非零解称为与特征值 λ 对应的特征函数.

2.2 主特征值及其对应的特征函数

主特征值和它对应的特征函数有非常好的性质, 在偏微分方程的研究中起重要作用.

我们首先陈述 Krein-Rutman 定理, 利用该定理可以推出主特征值对应的特征函数在 Ω 内无零点 (不妨认为是正的). 假设 E 是一个 Banach 空间, 子集 $P\subset E$ 被称为一个锥, 如果 P 满足:

(1) $x,y\in P$ 隐含 $x+y\in P$,

(2) 对任意的 $x\in P$ 和 $\lambda\geqslant 0$, 都有 $\lambda x\in P$,

(3) 若 $x\in P$ 并且 $x\neq 0$, 则 $-x\notin P$.

假设 P 是 E 中一个闭锥. 如果 $\overline{P-P}=E$, 则称 P 是一个完全锥; 如果 P 的内部 $\mathrm{int}P$ 不空, 则称 P 是一个实心锥.

记 E^* 是 E 的对偶空间. 集合 $P^*=\big\{\ell\in E^*:\ \ell(x)\geqslant 0,\ \forall\ x\in P\big\}$ 称为 P 的对偶锥.

假设 $\mathcal{A}$ 是一个线性算子. 如果 $\mathcal{A}(P)\subset P$, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个关于 P 的正算子; 如果 $\mathcal{A}(P\setminus\{0\})\subset \mathrm{int}P$, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个关于 P 的强正算子. 用 $\mathcal{A}^*$ 表示 $\mathcal{A}$ 的共轭算子.

如果 $\mathcal{A}$ 是有界线性算子, 称数 $r(\mathcal{A})=\sup\big\{|\lambda|:\ \lambda\in\sigma(\mathcal{A})\big\}$ 为算子 $\mathcal{A}$ 的谱半径. 特别地, 当 $\mathcal{A}$ 是紧线性算子时, $r(\mathcal{A})=\sup\big\{|\lambda|:\ \lambda\ \text{是}\ \mathcal{A}\ \text{的特征值}\big\}$.

定理 2.2.1 (Krein-Rutman 定理, [4, 定理 19.2, 习题 12]) 假设 E 是一个 Banach 空间, P 是 E 中的一个完全锥, $\mathcal{A}: E\longrightarrow E$ 是一个紧线性算子并且关于 P 是正的, 同时 $\mathcal{A}$ 的谱半径 $r(\mathcal{A})>0$. 那么 $r(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, 并且对应的特征向量 $u\in P$. 同时 $r(\mathcal{A}^*)=r(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}^*$ 的一个特征值, 对应的特征向量 $u^*\in P^*$.

利用定理 2.2.1, 可以推得下面的定理.

定理 2.2.2 [2] 假设 E 是一个 Banach 空间, P 是 E 中的一个实心锥, $\mathcal{A}: E\longrightarrow E$ 是一个关于 P 强正的紧线性算子. 那么

(1) $r(\mathcal{A})>0$ 并且 $r(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个简单特征值 (单重特征值), 其对应的特征向量 u 是正的, 即 $u\in\mathrm{int}P$. 同时 $\mathcal{A}$ 的其他特征值对应的特征向量都不属于 P;

(2) 对于 $\mathcal{A}$ 的所有特征值 μ, 只要 $\mu\neq r(\mathcal{A})$, 就有 $|\mu|<r(\mathcal{A})$.

在微分方程的应用中, 通常取 E 是一个函数空间, $\mathcal{A}$ 是一个线性偏微分算子的逆算子, P 是 E 中的所有非负函数构成的正锥.

我们先给出一个在后面将要多次用到的引理.

引理 2.2.1 假设函数 $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, 满足: $u|_{\partial\Omega} = 0$, $v|_{\partial\Omega} \geqslant 0$, 在 Ω 内 $u > 0$ 并且 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0$. 则存在正常数 $\varepsilon > 0$, 使得 $u + \varepsilon v > 0$ 在 Ω 内成立.

证明 由于 $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ 并且 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0$, 故存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得 $\left.\dfrac{\partial(u+\varepsilon_1 v)}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0$. 又因为 $(u+\varepsilon_1 v)|_{\partial\Omega} \geqslant 0$, 所以存在 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, 使得在 $\Omega \setminus \Omega_0$ 上 $u + \varepsilon_1 v > 0$. 注意到在 $\bar{\Omega}_0$ 上 $u > 0$, 因而存在 $\varepsilon_2 > 0$, 使得在 $\bar{\Omega}_0$ 上 $u + \varepsilon_2 v > 0$. 取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 即可. 证毕.

现在讨论特征值问题 (2.1.1) 的主特征值. 首先讨论边界条件是 $\mathscr{B}u = u$ 的情形. 假设

(A) $\mathscr{L}$ 是一致椭圆算子;

(B) $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x) \in C(\bar{\Omega})$.

取 $E = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. 先假设 $c(x) \geqslant 0$. 对于任意 $u \in E$, 线性问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}v = u(x), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一解 $v \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap E$. 定义 $\mathcal{A}u = v$. 因为嵌入 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ 是紧的, 所以算子 $\mathcal{A}$ 是线性紧算子. 再定义集合

$$P = \mathrm{closure}\left\{u : u \in E, u|_{\Omega} > 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0\right\},$$

那么 P 是 E 中的一个闭锥, 并且 $\mathrm{int}P \neq \varnothing$. 事实上, 利用引理 2.2.1 可证

$$\mathrm{int}P = \left\{u : u \in E, u|_{\Omega} > 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0\right\}.$$

根据强最大值原理和 Hopf 引理易知, $\mathcal{A}u \in \mathrm{int}P$, $\forall\, u \in P\setminus\{0\}$, 即 $\mathcal{A}$ 关于 P 是强正的. 利用定理 2.2.2 又知, 存在唯一的 $\mu_1 := r(\mathcal{A}) > 0$ 和唯一函数 $v \in \mathrm{int}P$, $\|v\| = 1$, 使得 $\mathcal{A}v = \mu_1 v$, 并且 $\mathcal{A}$ 的其他特征值 μ 都满足 $|\mu| < \mu_1$. 于是

$$v = \mathscr{L}(\mathcal{A}v) = \mu_1 \mathscr{L}v, \quad 即\ \mathscr{L}v = \frac{1}{\mu_1}v.$$

这表明特征值问题 (2.1.1) 有特征值 $\lambda_1 = 1/\mu_1 > 0$, 且对应的特征函数 $v(x) > 0$, $x \in \Omega$.

从上面的讨论又可以看出, 特征值问题 (2.1.1) 的特征值与算子 $\mathcal{A}$ 的特征值互为倒数 (因为 0 一定不是它们的特征值), 且一一对应. 注意到 $c(x) \geqslant 0$, 由极值原

理容易推出问题 (2.1.1) 的实特征值都是正的, 于是算子 $\mathcal{A}$ 的实特征值也都是正的. 又因为 $\mathcal{A}$ 的其他特征值 μ 都满足 $|\mu| < \mu_1$, 所以问题 (2.1.1) 的其他特征值 λ 都满足 $|\lambda| > \lambda_1$. 同时, 与问题 (2.1.1) 的其他特征值对应的特征函数如果是实函数, 一定在 Ω 内变号. 此外, 因为 μ_1 是 $\mathcal{A}$ 的简单特征值, 所以 λ_1 是问题 (2.1.1) 的简单特征值.

对于一般情形, 可取常数 $C > 0$ 使得 $C + c(x) > 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 把特征值问题 (2.1.1) 改写成

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + Cu = (\lambda + C)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

利用上面的结果, 我们有

定理 2.2.3 特征值问题 (2.1.1) 有简单的实特征值, 还是实部严格最小的特征值, 与它对应的特征函数在 Ω 内是正的 (负的), 并且只有这一个特征值对应于实的在 Ω 内无零点的特征函数. 通常把对应于正 (负) 特征函数的特征值称为**主特征值** 或**第一特征值**. 因此问题 (2.1.1) 的主特征值是唯一的并且还是实的和简单的. 利用紧算子的特征值理论又知, 问题 (2.1.1) 有可数个特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \cdots$.

如果特征值都是实的, 可以把它们按照从小到大的顺序排列成

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m < \cdots,$$

或者

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots.$$

前者记重数, 而后者不记重数. 此时, λ_1 是主特征值 (第一特征值), 也是**最小特征值**.

如果边界条件是 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)u = 0$ 并且 $b(x)|_{\partial\Omega} \geqslant 0$, 类似的结论成立.

关于主特征值, 我们还有下面的更一般结果.

定理 2.2.4 ([2, 定理 1.4, 定理 2.1, 定理 2.7]) 假设 $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, 其中 Γ_0 和 Γ_1 是两个互不相交的既开又闭集合 (其中有一个可以是空集). 考虑特征值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

其中

$$\mathscr{B}u = \begin{cases} u, & x \in \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)u, & x \in \Gamma_1, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

$b \in C^{1+\alpha}(\Gamma_1)$, $b(x) \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$. 那么特征值问题 (2.2.1) 有简单的实特征值记为 λ_1, 与其对应的特征函数在 Ω 内不改变符号. 同时, λ_1 还是实部最小 (不一定严格最小) 的特征值.

推论 2.2.1 假设 $b \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $b(x) \geqslant 0$ 并且 $c \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, 那么特征值问题

$$\begin{cases} -\triangle u + c(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值一定是最小特征值并且还是实的和简单的, 同时还存在与 λ_1 对应的正特征函数 $\varphi_1(x)$, 即 $\varphi_1(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$.

注 2.2.1 如果边界条件是

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

则 $\varphi_1(x) > 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立.

定理 2.2.5 假设 $c(x) \geqslant 0$, λ_1 是特征值问题

$$\begin{cases} -\triangle u + c(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ a(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值 (它一定是最小特征值并且还是实的和简单的), 其中

$$\text{(i)}\ \ a(x) \equiv 0,\ \ b(x) \equiv 1, \quad \text{或者}\ \ \text{(ii)}\ \ a(x) \equiv 1,\ \ b(x) \geqslant 0.$$

如果 $c(x) \not\equiv 0$ 或者 $b(x) \not\equiv 0$, 则 $\lambda_1 > 0$. 如果 $c(x) \equiv b(x) \equiv 0$, 则 $\lambda_1 = 0$.

有关主特征值的存在性, 利用椭圆型方程的 L^p 理论和嵌入定理, 还可以推广到有界系数的二阶线性椭圆算子的情况. 假设 $a_{ij} \in C(\Omega)$, $b_i, c \in L^{\infty}(\Omega)$, 并且存在正常数 c_0 和 C_0, 使得

$$c_0|y|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \leqslant C_0|y|^2, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \ \ x \in \Omega.$$

定理 2.2.6 ([2, 定理 2.7]) 假设算子 $\mathscr{L}$ 的系数满足上面的条件, $p \geqslant n$, 并且 $\partial\Omega \in C^2$. 边界算子是 $\mathscr{B}u = u$, 或者 $\mathscr{B}u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)u$, $b(x) \geqslant 0$. 那么下面的结论成立:

(1) 存在实数 λ_1 和函数 $\varphi_1 \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \ \ \varphi_1 > 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}\varphi_1 = 0, & x \in \partial\Omega; \end{cases}$$

(2) 如果 $\psi \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}\psi = \lambda\psi, \quad \psi > 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}\psi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

则 $\lambda = \lambda_1$, 并且 ψ 是 φ_1 的常数倍;

(3) 假设 $\psi \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (可以是复值函数), $\psi \not\equiv 0$, 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}\psi = \lambda\psi, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}\psi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

并且 $\lambda \neq \lambda_1$. 则 ${\rm Re}\,\lambda > \lambda_1$, 并且当 ψ 是实值函数时, 它一定在 Ω 内改变符号.

2.3 主特征值、最大值原理与正的严格上解之间的关系

前面已经提到, 椭圆算子确定的特征值问题的主特征值, 在偏微分方程的研究中起重要作用. 作为例子, 下面我们针对二阶线性椭圆型方程, 介绍主特征值、最大值原理与正的严格上解之间的关系. 首先考虑光滑系数和一般边界算子 $\mathscr{B}$ 的情况, 即 $\mathscr{L}$ 的系数满足上节的条件 (A) 和 (B), 算子 $\mathscr{B}$ 由式 (2.2.2) 定义.

定义 2.3.1 称算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 具有强最大值原理性质是指, 对于任意的 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 由

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \geqslant 0, \quad u \not\equiv 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u \geqslant 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

可以推出在 Ω 内 $u > 0$.

定义 2.3.2 函数 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 称为算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 的一个上解 (下解), 如果

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \geqslant (\leqslant)\ 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u \geqslant (\leqslant)\ 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

一个不是解的上解 (下解) 就称为是严格上解 (严格下解).

上解与下解合在一起称为上下解. 在上面的定义中, 上下解的光滑性比通常的定义中上下解的光滑性要高, 即要求 $u \in C^1(\bar{\Omega})$. 应用下面的定理 2.3.1 时, 要特别注意这一点.

定理 2.3.1 假设定理 2.2.4 的条件成立, 那么下面的结论等价:

(1) 算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 具有强最大值原理性质;

(2) 算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 有一个在 Ω 内恒正的严格上解;

(3) 算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 的主特征值 $\lambda_1 = \lambda_1(\mathscr{L}, \mathscr{B}) > 0$.

证明 该定理及其证明源于文献 [2, 定理 2.4].

(1)$\Longrightarrow$(3). 假设 $\lambda_1 \leqslant 0$. 取对应于 λ_1 的特征函数 ϕ 是负的, 即 $\phi < 0$ 在 Ω 内成立, 于是

$$\begin{cases} \mathscr{L}\phi = \lambda_1\phi \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}\phi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由强极值原理知 $\phi > 0$, 矛盾.

(3)$\Longrightarrow$(2). 设 $\psi > 0$ 是对应于 λ_1 的特征函数, 那么

$$\begin{cases} \mathscr{L}\psi = \lambda_1\psi > 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}\psi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

这说明 ψ 是一个在 Ω 内恒正的严格上解.

(2)$\Longrightarrow$(1). 设 v 是一个在 Ω 内恒正的严格上解. 先证明在 Γ_1 上 $v > 0$. 若不然, 则存在 $x_0 \in \Gamma_1$ 满足 $v(x_0) = 0$. 利用 Hopf 引理知 $\mathscr{B}v(x_0) = \dfrac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} < 0$, 此与条件 $\mathscr{B}v|_{\Gamma_1} \geqslant 0$ 矛盾.

再证明 $v(x) \geqslant \delta d(x, \Gamma_0)$ 对某个 $\delta > 0$ 和所有 $x \in \Omega$ 成立. 如若不然, 则存在序列 $x_k \in \Omega$, 使得 $v(x_k) \leqslant \dfrac{1}{k} d(x_k, \Gamma_0)$. 特别地, 当 $k \longrightarrow \infty$ 时 $v(x_k) \longrightarrow 0$. 通过选取子序列, 我们有 $x_k \longrightarrow x_0$. 利用 v 的连续性得 $v(x_0) = 0$. 由于 v 在 $\Omega \cup \Gamma_1$ 上是正的, 所以 $x_0 \in \Gamma_0$, 从而由 Hopf 引理知 $\dfrac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} < 0$. 由此又知, 存在 $\delta > 0$ 和 $r > 0$, 使得 $v(x) \geqslant \delta d(x, \Gamma_0)$ 对所有 $x \in \Omega \cap B_r(x_0)$ 成立. 此与 k 很大时 x_k 满足的不等式矛盾.

现在证明 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 有强最大值原理性质. 假设 $u \not\equiv 0$, 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u \geqslant 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

先假设在 Ω 内 $u \geqslant 0$. 那么 $u(x_0) > 0$ 对某个 $x_0 \in \Omega$ 成立. 如果存在 $x_1 \in \Omega$, 使得 $u(x_1) = 0$, 则存在球 $B \subset \Omega$, 在 B 内 $u(x) > 0$ 成立, 同时存在 $x_2 \in \partial B \cap \Omega$, 使得 $u(x_2) = 0$. 在点 x_2 处应用 Hopf 引理得 $D_{\nu_0} u(x_2) < 0$, 这里的 ν_0 表示球面 ∂B 在点 x_2 处的单位外法向. 由此推出, 当 $x \in \Omega \setminus B$ 且靠近 x_2 时, $u(x) < 0$. 此与 $u \geqslant 0$ 矛盾. 所以在 Ω 内 $u > 0$.

下面证明 $u(x_0) := \min\limits_{\bar{\Omega}} u < 0$ 的情况不可能发生. 用反证法, 假设 $u(x_0) < 0$. 因为在 Γ_0 上 $u \geqslant 0$ 并且 $u \in C^1(\bar{\Omega})$, 所以存在 $M > 0$, 使得 $u \geqslant -Md(x, \Gamma_0)$. 注意到 $v \geqslant \delta d(x, \Gamma_0)$, 我们有

$$u + \xi v \geqslant 0, \ \ \forall\, x \in \Omega, \ \ \xi \geqslant M/\delta.$$

由于 $u(x_0) < 0$, 所以上面的不等式对较小的 $\xi > 0$ 不成立, 因而存在一个最小的正常数 ξ, 记为 ξ_0, 使得 $u + \xi_0 v \geqslant 0$ 在 Ω 内成立. 这样, $\tilde{v} := u + \xi_0 v$ 是一个严格上解并且在 Ω 内是非负的, 故 $\tilde{v}$ 不能恒等于零. 同于上一段的讨论知, $\tilde{v} > 0$ 在 Ω 内成立. 同于上面对于 v 的讨论又知, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\tilde{v} \geqslant \varepsilon d(x, \Gamma_0)$. 于是在 Ω 内 $u + \xi_0 v \geqslant -(\varepsilon/M)u$, 即

$$u + \xi_0(1 + \varepsilon/M)^{-1} v \geqslant 0, \quad x \in \Omega,$$

此与 ξ_0 的最小性矛盾. 所以 $\min_{\bar{\Omega}} u < 0$ 的情况不会发生. 证毕.

注 2.3.1 如果算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 有一个在 Ω 内恒正的严格下解, 那么 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 的主特征值 $\lambda_1(\mathscr{L}, \mathscr{B}) < 0$.

再考虑有界系数和 Dirichlet 边界条件的情况, 此时把边界算子记为 $\mathscr{D}$. 称 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 具有最大值原理性质, 如果对于任意的 $v \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 由

$$\mathscr{L}v \geqslant 0, \quad x \in \Omega; \quad \liminf_{x \to \partial\Omega} v(x) \geqslant 0,$$

可以推出 $v \geqslant 0$ 在 Ω 内成立.

定义 2.3.3 函数 $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 称为 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 的一个上 (下) 解, 如果

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \geqslant (\leqslant) 0, & x \in \Omega, \\ u \geqslant (\leqslant) 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

一个不是解的上解 (下解) 就称为是严格上解 (严格下解).

定理 2.3.2 ([2, 定理 2.8]) 假设定理 2.2.6 的条件成立. 那么下面的结论等价:

(1) 算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 具有最大值原理性质;

(2) 算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 有一个在 Ω 内恒正的严格上解;

(3) 算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 的主特征值 $\lambda_1(\mathscr{L}, \mathscr{D}) > 0$.

注 2.3.2 如果算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 有一个在 Ω 内恒正的严格下解, 那么 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 的主特征值 $\lambda_1(\mathscr{L}, \mathscr{D}) < 0$.

设函数 $q \in C(\bar{\Omega})$, 记问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.1}$$

的主特征值为 $\lambda_1(q)$. 当 $q(x) \equiv 0$ 时, 简记 $\lambda_1(0) = \lambda_1$.

利用定理 2.3.2 和注 2.3.2, 我们有

推论 2.3.1 设 $q \in C(\bar{\Omega})$, k 是一个常数. 如果存在正函数 φ, 使得

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + q(x)\varphi \geqslant (\leqslant)\, k\varphi, & x \in \Omega, \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

则 $\lambda_1(q) \geqslant (\leqslant)\, k$. 进一步, 如果 (2.3.2) 不是恒等式, 则 $\lambda_1(q) > (<)\, k$.

在文献 [5] 中, Berestycki, Nirenberg 和 Varadhan 讨论了一般区域上的特征值问题, 并建立了主特征值与最大值原理之间的等价关系.

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域 (没有光滑性条件), $\mathscr{L}$ 是 Ω 上具有实系数的二阶一致椭圆算子

$$\mathscr{L} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i + c(x),$$

系数 a_{ij} 连续, b_i 和 c 有界. 记 u_0 是问题

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i D_i u = 1, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解.

定义 2.3.4 称算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 具有最大值原理性质, 如果 $w \in W^{2,n}_{\rm loc}(\Omega)$ 满足:

(1) w 有下界;

(2) 对任意的点列 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, 由 $u_0(x_j) \longrightarrow 0$ 可以推出 $\liminf\limits_{j\to\infty} w(x_j) \geqslant 0$;

(3) $\mathscr{L} w \geqslant 0,\ x \in \Omega$,

就一定能够推出在 Ω 内 $w \geqslant 0$.

定义算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 的主特征值

$$\lambda_1(\mathscr{L}, \mathscr{D}) = \sup\big\{\lambda \in \mathbb{R}:\ \text{存在}\ \phi > 0,\ \text{使得}\ \mathscr{L}\phi \geqslant \lambda\phi\big\}. \tag{2.3.3}$$

定理 2.3.3 [5] 算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 的主特征值 $\lambda_1(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 存在, 并且算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ 具有最大值原理性质当且仅当 $\lambda_1(\mathscr{L}, \mathscr{D}) > 0$.

2.4 散度型二阶线性椭圆算子的特征值

本节讨论散度型二阶线性椭圆算子的特征值问题 (2.1.2). 假定 $\mathscr{L}$ 的系数满足:

(1) $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}),\quad q \in C(\bar{\Omega})$,

(2) $a_{ij} = a_{ji}$, 且存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \geqslant \alpha |y|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

(3) $b(x) \in C(\partial\Omega)$, $b(x) \geqslant 0$.

假设 λ 是特征值问题 (2.1.2) 的一个特征值, $u \in H^1(\Omega)$ 是对应的特征函数. 利用二阶线性椭圆型方程解的正则性理论易知, 对于任意的 $1 < p < \infty$, 有 $u \in W^{2,p}(\Omega)$, 从而 $u \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$.

对于 $u, v \in H^1(\Omega)$, 定义

$$F(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u D_j v \mathrm{d}x + \int_{\Omega} q(x) uv \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b(x) uv \mathrm{d}S,$$

$$(u,v) = \int_{\Omega} uv \mathrm{d}x, \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u,u)}\,.$$

因为算子 $(\mathscr{L}, \mathscr{B})$ 是对称算子, 我们有

引理 2.4.1 (1) 特征值问题 (2.1.2) 的特征值都是实数;

(2) 假设 λ 和 λ^* 是特征值问题 (2.1.2) 的两个不同特征值, u 和 u^* 分别是对应于 λ 和 λ^* 的特征函数. 则 u 和 u^* 正交, 即 $(u, u^*) = 0$.

利用椭圆型方程解的唯一延拓定理, 我们有下面的结论.

定理 2.4.1 特征值问题 (2.1.2) 的任意特征函数 u 在 Ω 内的任意球上不能恒为零.

2.4.1 特征值的极值性质

假设 λ 是特征值问题 (2.1.2) 的一个特征值, $u \in H^1(\Omega)$ 是对应的特征函数. 在 $L^2(\Omega)$ 中把它标准化, 即 $\|u\|_2 = 1$. 因为 $u \in H^2(\Omega)$, 所以

$$F(u,u) = (\mathscr{L}u, u) = \lambda(u,u) = \lambda,$$

即

$$\lambda = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u D_j u \mathrm{d}x + \int_{\Omega} q u^2 \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b(x) u^2 \mathrm{d}S.$$

引进泛函

$$F(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u D_j u \mathrm{d}x + \int_{\Omega} q u^2 \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b(x) u^2 \mathrm{d}S,$$

其中 F 的定义域 $D(F)$ 这样确定: 当边界条件是 (2.1.3) 时, 取 $D(F) = H_0^1(\Omega)$; 当边界条件是 (2.1.4) 时, 取 $D(F) = H^1(\Omega)$. 因为 $D(F)$ 实际上只依赖于边界算子 $\mathscr{B}$, 我们把它记为 $D(\mathscr{B})$.

若 $u, v_1, \cdots, v_m \in L^2(\Omega)$, 满足 $(u, v_i) = 0$, $i = 1, \cdots, m$, 就记成 $u \perp \{v_i\}_{i=1}^m$. 对于任意给定的函数组 $v_1, \cdots, v_m \in L^2(\Omega)$, 记

$$\Phi\big(\{v_i\}_{i=1}^m\big) = \big\{u : u \in D(\mathscr{B}), \|u\|_2 = 1, u \perp \{v_i\}_{i=1}^m\big\},$$

$$d\big(\{v_i\}_{i=1}^m\big) = \inf\big\{F(u) : u \in \Phi\big(\{v_i\}_{i=1}^m\big)\big\}.$$

定理 2.4.2 (极小原理)　实数

$$\lambda_1 = F(u_1) = \inf\left\{F(u):\ u \in D(\mathscr{B}),\ \|u\|_2 = 1\right\}$$

是特征值问题 (2.1.2) 的最小特征值, u_1 是对应的特征函数. 实数

$$\lambda_k = F(u_k) = d\left(\left\{u_i\right\}_{i=1}^{k-1}\right),\ \ k \geqslant 2$$

是特征值问题 (2.1.2) 的一个特征值, 并且 u_k 是对应的特征函数.

证明　我们只证明 $\mathscr{B}u = u$ 的情况, 此时的 $D(\mathscr{B}) = H_0^1(\Omega)$.

第一步　讨论 λ_1. 利用椭圆性条件知, 对于 $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_2 = 1$, 有

$$F(u) \geqslant \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega q u^2 \mathrm{d}x,$$

其中常数 $\alpha > 0$. 由此推出, $F(u)$ 在集合

$$A_1 := \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \|u\|_2 = 1\right\}$$

上是强制的. 容易看出 A_1 是序列式弱闭集并且 F 在 A_1 上是弱下半连续的. 根据推论 1.2.1, 存在 $u_1 \in A_1$, 使得

$$\lambda_1 = F(u_1) = \inf_{u \in A_1} F(u). \tag{2.4.1}$$

记 $J_{\lambda_1}(u) = F(u) - \lambda_1 \|u\|_2^2$, 则

$$J_{\lambda_1}(u) = \|u\|_2^2 \left[F\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right) - \lambda_1\right] \geqslant 0, \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0.$$

从而由 (2.4.1) 式得

$$0 = J_{\lambda_1}(u_1) \geqslant \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J_{\lambda_1}(u) \geqslant 0,$$

故

$$0 = J_{\lambda_1}(u_1) = \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} J_{\lambda_1}(\varphi).$$

利用定理 1.2.1,

$$\int_\Omega J'_{\lambda_1}(u_1)\varphi \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

即

$$F(u_1, \phi) = \lambda_1(u_1, \phi), \ \ \forall\ \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4.2}$$

这说明 $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ 是边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \lambda_1 u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的一个弱解, 于是 $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

第二步 讨论 λ_2. 同于第一步可以证明, 第二个极小问题有解, 即存在 $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\|u_2\|_2 = 1$, $u_2 \perp u_1$, 使得

$$\lambda_2 = F(u_2) = \inf\left\{F(u) : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_2 = 1,\ u \perp u_1\right\}.$$

对于和 u_1 正交的任意函数 $\psi \in H_0^1(\Omega)$, 同于式 (2.4.2) 的证明可得

$$F(u_2, \psi) - \lambda_2(u_2, \psi) = 0. \tag{2.4.3}$$

对于任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, 取常数 $t = -(\varphi, u_1)$, 那么 $\psi := \varphi + tu_1$ 满足 $(\psi, u_1) = 0$. 利用式 (2.4.3) 知

$$F(u_2, \varphi) - \lambda_2(u_2, \varphi) + t[F(u_2, u_1) - \lambda_2(u_2, u_1)] = 0.$$

因为 $(u_2, u_1) = 0$, 在式 (2.4.2) 中取 $\varphi = u_2$, 就有 $F(u_1, u_2) = 0$, 于是

$$F(u_2, \varphi) - \lambda_2(u_2, \varphi) = 0.$$

类似于第一步的讨论, u_2 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}u_2 = \lambda_2 u_2, & x \in \Omega, \\ u_2 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

重复以上步骤, 即得结论. 证毕.

推论 2.4.1 按上面的方式得到的特征值 λ_k 和对应的特征函数 u_k 具有以下性质:

$$\begin{aligned} &F(u_k) = \lambda_k, \quad \|u_k\|_2 = 1, \quad \lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}, \quad \forall\, k \geqslant 1, \\ &F(u_k, u_l) = 0, \qquad (u_k, u_l) = 0, \quad \forall\, k \neq l, \\ &F(u_k, \varphi) - \lambda_k(u_k, \varphi) = 0, \quad \forall\, \varphi \in D(\mathscr{B}). \end{aligned}$$

于是我们可以按如下方式排列:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots.$$

定理 2.4.3 (极大–极小原理) 按上面的方式得到的特征值问题 (2.1.2) 的特征值 λ_k 可以写成

$$\lambda_k = \sup_{\{v_i\}_{i=1}^{k-1}} d\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big) = d\big(\{u_i\}_{i=1}^{k-1}\big), \quad k \geqslant 2.$$

证明 对任意给定的函数 $v_1, \cdots, v_{k-1} \in L^2(\Omega)$, 先证明存在 $\varphi \in \Phi\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big)$, 使得 $F(\varphi) \leqslant \lambda_k$. 事实上, 取 $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j u_j$, 则 $\varphi \in D(\mathscr{B})$ 并且

$$(\varphi, v_i) = \sum_{j=1}^{k} c_j (u_j, v_i), \quad i = 1, \cdots, k-1, \quad (\varphi, \varphi) = \sum_{j=1}^{k} c_j^2.$$

总可以取到 $c_1, \cdots, c_k$, 使得

$$\|\varphi\|_2 = 1, \quad (\varphi, v_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, k-1.$$

因为当 $i \neq j$ 时, $F(u_i, u_j) = 0$, 并且 $F(u_j, u_j) = F(u_j) = \lambda_j$, 所以

$$\begin{aligned} F(\varphi) - \lambda_k &= F\left(\sum_{j=1}^{k} c_j u_j\right) - \lambda_k \\ &= \sum_{i,j=1}^{k} c_i c_j F(u_i, u_j) - \lambda_k \\ &= \sum_{j=1}^{k} c_j^2 (\lambda_j - \lambda_k) \leqslant 0, \end{aligned}$$

即 $F(\varphi) \leqslant \lambda_k$. 从而对任意给定的 $\{v_i\}_{i=1}^{k-1}$, 有

$$d\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big) \leqslant \lambda_k,$$

这表明 λ_k 是 $d\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big)$ 的一个上界. 由 λ_k 的构造知,

$$\lambda_k = d\big(\{u_i\}_{i=1}^{k-1}\big) = F(u_k),$$

即 λ_k 是可达的, 因此 $\lambda_k = \sup\limits_{\{v_i\}_{i=1}^{k-1}} d\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big)$. 结论成立.

2.4.2 特征值的无界性和特征函数系的完备性

利用泛函的极值问题, 我们得到了特征值问题 (2.1.2) 的一串特征值

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}: \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

和对应的特征函数

$$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}: \quad \lambda_k = F(u_k), \quad \|u_k\|_2 = 1.$$

定理 2.4.4 $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = \infty$.

证明 用反证法. 假设

$$\lambda_k = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) D_i u_k D_j u_k \mathrm{d}x + \int_\Omega q(x) u_k^2 \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b u_k^2 \mathrm{d}S$$

上方有界. 选取正常数 c, 使 $\beta = \min\limits_{\bar{\Omega}}(q(x)+c) > 0$. 因为在 $\partial\Omega$ 上 $b(x) \geqslant 0$, 所以存在正常数 M, 使得

$$\begin{aligned} M \geqslant \lambda_k + c &\geqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) D_i u_k D_j u_k \mathrm{d}x + \int_\Omega (q(x)+c) u_k^2 \mathrm{d}x \\ &\geqslant \alpha \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \mathrm{d}x + \beta \int_\Omega u_k^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由此知, 序列 $\left\{\int_\Omega u_k^2 \mathrm{d}x\right\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\left\{\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \mathrm{d}x\right\}_{k=1}^{\infty}$ 都有界. 由于 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是紧的, 故存在一个子序列, 仍记为 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{k,\,l\to\infty} \|u_k - u_l\|_2 = 0.$$

然而, 当 $k \neq l$ 时,

$$\|u_k - u_l\|_2^2 = (u_k - u_l, u_k - u_l) = 2.$$

这是一个矛盾, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$. 证毕.

定理 2.4.5 数列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是问题 (2.1.2) 的全部特征值, 特征函数系 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一个完备正交系.

证明 假设 $\hat{\lambda}$ 是特征值问题 (2.1.2) 的一个特征值, 并且 $\hat{\lambda} \notin \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. 记 $\hat{\lambda}$ 对应的特征函数是 $\hat{u}$, $\|\hat{u}\|_2 = 1$, 那么 $F(\hat{u}) = \hat{\lambda}$, 且 $(\hat{u}, u_k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots$. 于是

$$\hat{\lambda} \geqslant \inf\left\{F(\varphi) : \varphi \in \Phi\left(\{u_i\}_{i=1}^{k}\right)\right\}.$$

利用特征值的极小原理又得, $\hat{\lambda} \geqslant \lambda_{k+1}$ 对所有的 $k \geqslant 1$ 成立. 又因为 $\lambda_k \to \infty$, 这显然是一个矛盾.

再证 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一组完备正交系. 先证明 $D(\mathscr{B})$ 中的函数可以按照函数系 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 展开. 假设 $f \in D(\mathscr{B})$, 记

$$\rho_k = f - \sum_{i=1}^{k} c_i u_i, \quad 其中 \ c_i = (f, u_i),$$

则有

$$(\rho_k, u_i) = 0, \qquad i = 1, \cdots, k.$$

利用特征值的极小性质, 有 $\lambda_{k+1}(\rho_k,\rho_k)\leqslant F(\rho_k)$, 即 $\|\rho_k\|_2^2\leqslant F(\rho_k)/\lambda_{k+1}$. 因为

$$F(u_i,\rho_k)-\lambda_i(u_i,\rho_k)=0,\quad (u_i,\rho_k)=0,\quad i=1,\cdots,k,$$

所以 $F(u_i,\ \rho_k)=0,\ i=1,\cdots,k$. 从而

$$F\left(\rho_k,\sum_{i=1}^k c_iu_i\right)=\sum_{i=1}^k c_iF(\rho_k,u_i)=0.$$

由此得

$$\begin{aligned}F(f)&=F\left(\rho_k+\sum_{i=1}^k c_iu_i\right)\\&=F(\rho_k)+2F\left(\rho_k,\sum_{i=1}^k c_iu_i\right)+F\left(\sum_{i=1}^k c_iu_i\right)\\&=F(\rho_k)+F\left(\sum_{i=1}^k c_iu_i\right).\end{aligned}$$

再利用

$$F\left(\sum_{i=1}^k c_iu_i\right)=c_1^2F(u_1)+F\left(\sum_{i=2}^k c_iu_i\right)=\sum_{i=1}^k c_i^2\lambda_i$$

知

$$\begin{aligned}F(\rho_k)&=F(f)-\sum_{i=1}^k c_i^2\lambda_i=F(f)-\sum_{i=1}^{k_0} c_i^2\lambda_i-\sum_{i=k_0+1}^{k} c_i^2\lambda_i\\&\leqslant F(f)-\sum_{i=1}^{k_0} c_i^2\lambda_i\leqslant M,\end{aligned}$$

其中 k_0 是固定的正整数, 满足 $\lambda_i>0,\ \forall i>k_0$. 于是 $\|\rho_k\|_2^2\leqslant M/\lambda_{k+1},\ \forall\, k>k_0$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$, 故

$$\lim_{k\to\infty}\left\|f-\sum_{i=1}^k c_iu_i\right\|_2=\lim_{k\to\infty}\|\rho_k\|_2=0,$$

即

$$f=\sum_{i=1}^\infty c_iu_i.$$

对于任意 $f\in L^2(\Omega)$, 存在 $g\in D(\mathscr{B})$ 使得 $\|f-g\|_2<\varepsilon/3,\ \varepsilon>0$. 记 $(g,\ u_i)=c_i^*$, 则

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{k}c_iu_i\right\|_2\leqslant\|f-g\|_2+\left\|g-\sum_{i=1}^{k}c_i^*u_i\right\|_2+\left\|\sum_{i=1}^{k}(c_i-c_i^*)u_i\right\|_2.$$

因为 $(f-g,u_i)=c_i-c_i^*$, 由 Bessel 不等式推知

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}(c_i-c_i^*)u_i\right\|_2^2=\sum_{i=1}^{k}(c_i-c_i^*)^2\leqslant\|f-g\|_2^2<(\varepsilon/3)^2,$$

因此

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{k}c_iu_i\right\|_2\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}+\left\|g-\sum_{i=1}^{k}c_i^*u_i\right\|_2.$$

对于这个固定的 g, 存在 K 使得

$$\left\|g-\sum_{i=1}^{k}c_i^*u_i\right\|_2<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall\, k\geqslant K,$$

这说明 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|f-\sum\limits_{i=1}^{k}c_iu_i\right\|_2=0$. 证毕.

注 2.4.1 从定理 2.4.5 的第一个结论和主特征值的性质容易看出, 上面得到的 λ_1 是问题 (2.1.2) 的主特征值. 从而 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可以按照从小到大的顺序排列成

$$\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant\cdots.$$

2.4.3 特征值的变化

本节利用特征值的极大–极小原理, 讨论不同类型边界条件下的特征值的大小关系、特征值关于参数的连续依赖性以及特征值关于区域的连续依赖性. 首先考虑下面的三个特征值问题:

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)D_iu\cos(\nu,x_j)+b_1(x)u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)D_iu\cos(\nu,x_j)+b_2(x)u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

分别记它们的第 k 个特征值为 λ_k, $\lambda_k^{(1)}$ 和 $\lambda_k^{(2)}$.

定理 2.4.6 假设 $b_1(x) \leqslant b_2(x)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上成立, 那么

$$\lambda_k^{(1)} \leqslant \lambda_k^{(2)} \leqslant \lambda_k.$$

证明 令

$$F_2(\varphi) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x) D_i\varphi D_j\varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega q\varphi^2 \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b_2(x)\varphi^2 \mathrm{d}S.$$

显然对任意给定的 $\{v_i\}_{i=1}^{k-1} \subset L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\inf\left\{F_2(\varphi) : \varphi \in \Phi\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big)\right\} &\leqslant \inf\left\{F_2(\varphi) : \varphi \in \Phi\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big), \varphi|_{\partial\Omega} = 0\right\} \\ &= \inf\left\{F(\varphi) : \varphi \in \Phi\big(\{v_i\}_{i=1}^{k-1}\big), \varphi|_{\partial\Omega} = 0\right\}.\end{aligned}$$

上式两边关于 $\{v_i\}_{i=1}^{k-1}$ 取上确界便得, $\lambda_k^{(2)} \leqslant \lambda_k$. 同理可得另一个不等式. 证毕.

再考察下面的两个特征值问题:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x)D_iu) + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4.4}$$

和

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^n D_j(\tilde{a}_{ij}(x)D_iu) + \tilde{q}(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

它们的第 k 个特征值分别记为 λ_k 和 $\tilde{\lambda}_k$.

定理 2.4.7 假设

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)y_iy_j \leqslant \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(x)y_iy_j, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

并且

$$q(x) \leqslant \tilde{q}(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

则有 $\lambda_k \leqslant \tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \cdots$. 如果又有 $q(x) \not\equiv \tilde{q}(x)$, 那么 $\lambda_k < \tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \cdots$.

证明 我们只证第二个结论, 第一个结论的证明留作习题.

记特征值问题 (2.4.4) 对应的泛函是 $F(\varphi)$, 它的特征值 λ_k 对应的特征函数是 u_k. 分解 $\tilde{q}(x) = q(x) + h(x)$, 则 $h(x) \geqslant 0$, $h(x) \not\equiv 0$. 考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x)D_i u) + \tilde{q}(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4.5}$$

假设 $\hat{F}(\varphi)$ 是它对应的泛函, $\hat{\lambda}_k$ 是它的第 k 个特征值. 由第一个结论知, $\hat{\lambda}_k \leqslant \tilde{\lambda}_k$. 同于定理 2.4.2 中极小问题有解的证明可证, 极小问题

$$\hat{F}(\psi) = \inf\left\{\hat{F}(\varphi) : \varphi \in \Phi\big(\{u_i\}_{i=1}^{k-1}\big)\right\}$$

有解 ψ, 并且 ψ 是特征值问题 (2.4.5) 的一个特征函数. 注意到特征函数在 Ω 内的任意球上不能恒为零, 先利用特征值的极大–极小原理, 再利用特征值的极小原理, 我们有

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k \geqslant \hat{\lambda}_k &\geqslant \inf\left\{\hat{F}(\varphi) : \varphi \in \Phi\big(\{u_i\}_{i=1}^{k-1}\big)\right\} \\ &= \hat{F}(\psi) = F(\psi) + \int_\Omega h(x)\psi^2(x)\mathrm{d}x > F(\psi) \geqslant \lambda_k. \end{aligned}$$

定理得证.

定理 2.4.8 假设边界条件是 $\mathscr{B}u = u$, $q(x) \leqslant \tilde{q}(x)$, 并且

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x)y_i y_j > \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)y_i y_j, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},\ y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.4.6}$$

那么 $\tilde{\lambda}_k \geqslant \lambda_k + \delta\mu_0$, 其中 μ_0 是算子 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的主特征值, $\delta > 0$ 由下面的式 (2.4.7) 确定.

证明 由条件 (2.4.6) 知, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x)y_i y_j \geqslant \delta|y|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)y_i y_j, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},\ y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.4.7}$$

定义

$$a_{ij}^*(x) = \begin{cases} a_{ii}(x) + \delta, & i = j, \\ a_{ij}(x), & i \neq j, \end{cases}$$

那么

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^*(x)y_i y_j \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x)y_i y_j, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},\ y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

记特征值问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}^*(x)D_i u) + q(x)u = \mu u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4.8}$$

对应的泛函是 $F^*(\varphi)$, 第 k 个特征值是 μ_k. 由定理 2.4.7 知 $\mu_k \leqslant \tilde{\lambda}_k$. 又记特征值问题 (2.4.4) 对应的泛函是 $F(\varphi)$, 特征值 λ_k 对应的特征函数是 u_k. 同上可证, 极小问题

$$F^*(\psi)=\inf\left\{F^*(\varphi):\varphi\in\Phi\big(\{u_i\}_{i=1}^{k-1}\big)\right\}$$

有解 ψ, 并且 ψ 是特征值问题 (2.4.8) 的一个特征函数. 因为 $\|\psi\|_2=1$, 由 Poincaré 不等式知, $\|D\psi\|_2^2\geqslant\mu_0$. 利用特征值的极值性质, 有

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_k&\geqslant\mu_k\geqslant\inf\left\{F^*(\varphi):\varphi\in\Phi\big(\{u_i\}_{i=1}^{k-1}\big)\right\}\\&=F^*(\psi)=\delta\int_\Omega|D\psi|^2\mathrm{d}x+\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}D_i\psi D_j\psi\mathrm{d}x+\int_\Omega q\psi^2\mathrm{d}x\\&\geqslant\delta\mu_0+F(\psi)\geqslant\delta\mu_0+\lambda_k.\end{aligned}$$

定理得证.

定理 2.4.9 特征值问题 (2.1.2) 的特征值连续依赖于系数 $a_{ij}(x)$, $q(x)$ 和 $b(x)$.

证明 仅以算子 $-\Delta$ 为例来证明 λ_1 关于 $q(x)$ 的连续依赖性, 其余证明可以参见文献 [6]. 为了强调 λ_1 关于 $q(x)$ 的依赖性, 我们把 λ_1 写成 $\lambda_1(q)$. 假设在 $L^\infty(\Omega)$ 中 $q_m\longrightarrow q$. 分别记 u_m 和 u 是对应于 $\lambda_1(q_m)$ 和 $\lambda_1(q)$ 的单位化的正特征函数, 即

$$\begin{aligned}&u_m,\ u>0,\quad\|u_m\|_\infty=\|u\|_\infty=1,\\&-\Delta u_m=-q_mu_m+\lambda_1(q_m)u_m,\quad x\in\Omega;\quad u_m|_{\partial\Omega}=0,\\&\quad-\Delta u=-qu+\lambda_1(q)u,\quad x\in\Omega;\quad u|_{\partial\Omega}=0.\end{aligned}\tag{2.4.9}$$

因为 $q_m\longrightarrow q$, 不妨认为 $q-1\leqslant q_m\leqslant q+1$ 对所有 $m\geqslant1$ 成立. 根据定理 2.4.8,

$$\lambda_1(q-1)\leqslant\lambda_1(q_m)\leqslant\lambda_1(q+1).$$

由此知, 存在与 m 无关的正常数 C 使得

$$\|-q_mu_m+\lambda_1(q_m)u_m\|_\infty\leqslant C.$$

应用椭圆型方程的 L^p 理论于问题 (2.4.9) 知, 对于任意的 $p>1$, $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 是 $W^{2,p}(\Omega)$ 中的有界集. 再利用嵌入定理, $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中是紧的. 于是存在 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 的子列, 仍然记为它自身, 使得在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中 $u_m\longrightarrow u_0$. 因为 $\lambda_1(q-1)\leqslant\lambda_1(q_m)\leqslant\lambda_1(q+1)$, 不妨认为 $\lambda_1(q_m)\longrightarrow\lambda^*$. 于是在 $L^\infty(\Omega)$ 中,

$$-q_mu_m+\lambda_1(q_m)u_m\longrightarrow-qu_0+\lambda^*u_0.$$

由问题 (2.4.9) 知, 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中 $u_m\longrightarrow u_0\geqslant0$, 并且

$$-\Delta u_0 = -qu_0 + \lambda^* u_0,\quad x \in \Omega;\quad u_0|_{\partial\Omega} = 0,\quad \|u_0\|_\infty = 1.$$

根据弱解的强最大值原理 (定理 B.1.9), 在 Ω 内 $u_0 > 0$. 这说明, λ^* 是 $\mathscr{L}$ 的主特征值, 即 $\lambda^* = \lambda_1(q)$, 并且 u_0 是对应于 $\lambda_1(q)$ 的正特征函数. 又因为 $u_0 > 0$, 所以 $u_0 = u$. 这也说明, 整个序列 $u_m \longrightarrow u$, $\lambda_1(q_m) \longrightarrow \lambda_1(q)$. 定理得证.

再考虑特征值关于区域 Ω 的连续依赖性. 记特征值问题 (2.1.2) 的第 k 个特征值是 $\lambda_k(\Omega)$.

定理 2.4.10 如果边界条件是 $\mathscr{B}u = u$, 那么 $\lambda_k(\Omega)$ 关于 Ω 是单减的, 即 $\Omega \subset \Omega^*$ 隐含 $\lambda_k(\Omega) \geqslant \lambda_k(\Omega^*)$, $\Omega \subsetneqq \Omega^*$ 隐含 $\lambda_k(\Omega) > \lambda_k(\Omega^*)$. 同时, 当区域 Ω 连续变化时, $\lambda_k(\Omega)$ 也连续变化.

如果边界条件是 Neumann 边界条件或者 Robin 边界条件, 那么 $\lambda_k(\Omega)$ 关于 Ω 的单调性一般不成立, 并且关于 Ω 的连续依赖性也是在特定的意义下才成立. 关于 Neumann 边界条件的结果和反例可参见文献 [6,7], 关于 Robin 边界条件的结果和反例可参见文献 [8].

证明 只证明 $\lambda_k(\Omega)$ 关于区域 Ω 的单调性和 $\lambda_1(\Omega)$ 关于区域 Ω 的严格单调性, 其余证明可以参见文献 [6]. 定义

$$F_\Omega(\varphi) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x) D_i\varphi D_j\varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega q\varphi^2 \mathrm{d}x.$$

在这个证明中, 总用 $\tilde{\varphi}$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 中的函数 φ 零延拓到 Ω^* 之后得到的函数. 显然 $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega^*)$, 并且 $\|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega^*)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$. 于是由特征值的极小原理得

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Omega) &= \inf\left\{F_\Omega(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}\\
&= \inf\left\{F_{\Omega^*}(\tilde{\varphi}) : \tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega^*),\ \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega^*)} = 1\right\}\\
&\geqslant \inf\left\{F_{\Omega^*}(\varphi^*) : \varphi^* \in H_0^1(\Omega^*),\ \|\varphi^*\|_{L^2(\Omega^*)} = 1\right\}\\
&= \lambda_1(\Omega^*).
\end{aligned}$$

对于任意给定的函数 $v_1, \cdots, v_k \in L^2(\Omega^*)$, 记 $\hat{v}_i = v_i|_\Omega$, 则 $\hat{v}_i \in L^2(\Omega)$. 由特征值的极大–极小原理知

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1}(\Omega) &\geqslant \inf\left\{F_\Omega(\varphi) : \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1,\ \varphi \perp \{\hat{v}_i\}_{i=1}^k\right\}\\
&= \inf\left\{F_{\Omega^*}(\tilde{\varphi}) : \tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega^*),\ \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega^*)} = 1,\ \tilde{\varphi} \perp \{v_i\}_{i=1}^k\right\}\\
&\geqslant \inf\left\{F_{\Omega^*}(\varphi^*) : \varphi^* \in H_0^1(\Omega^*),\ \|\varphi^*\|_{L^2(\Omega^*)} = 1,\ \varphi^* \perp \{v_i\}_{i=1}^k\right\}.
\end{aligned}$$

上式右端关于 $v_1, \cdots, v_k \in L^2(\Omega^*)$ 取上确界即得 $\lambda_{k+1}(\Omega) \geqslant \lambda_{k+1}(\Omega^*)$.

下面证明当 $\Omega \subsetneqq \Omega^*$ 时, $\lambda_1(\Omega) > \lambda_1(\Omega^*)$. 设 u 和 u^* 分别是对应于 $\lambda_1(\Omega)$ 和 $\lambda_1(\Omega^*)$ 的正特征函数, 那么在 Ω 内 $u > 0$, 在 Ω^* 内 $u^* > 0$, 并且还有

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(a_{ij}(x)D_i u\big) + q(x)u = \lambda_1(\Omega)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4.10}$$

和

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(a_{ij}(x)D_i u^*\big) + q(x)u^* = \lambda_1(\Omega^*)u^*, & x \in \Omega^*, \\ u^* = 0, & x \in \partial\Omega^*. \end{cases} \tag{2.4.11}$$

因为矩阵 $(a_{ij}(x))_{n\times n}$ 是正定的, 所以方向

$$\mu = (a_{ij}(x))_{n\times n}\nu = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x)\cos(\nu, x_j), \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(x)\cos(\nu, x_j)\right)^{\mathrm{T}}$$

与 ν 之间的夹角小于 $\pi/2$. 运用 Hopf 引理于问题 (2.4.10) 得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_i u\cos(\nu,\, x_j)\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|_{\partial\Omega} < 0. \tag{2.4.12}$$

用 u^* 乘以特征值问题 (2.4.10) 的方程两端并在 Ω 上积分, 再利用式 (2.4.12) 得

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Omega)\int_{\Omega} uu^*\mathrm{d}x = &-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega} u^* a_{ij}(x)D_i u\cos(\nu,\, x_j)\mathrm{d}S \\ &+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)D_i u D_j u^*\mathrm{d}x + \int_{\Omega} q(x)uu^*\mathrm{d}x \\ &> \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)D_i u D_j u^*\mathrm{d}x + \int_{\Omega} q(x)uu^*\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

把 u 零延拓到 Ω^*, 延拓后的函数仍记为 u. 用 u 乘以特征值问题 (2.4.11) 的方程两端并在 Ω^* 上积分, 并注意到在 $\Omega^*\setminus\Omega$ 上 $u\equiv 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Omega^*)\int_{\Omega} uu^*\mathrm{d}x &= \lambda_1(\Omega^*)\int_{\Omega^*} uu^*\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega^*} a_{ij}(x)D_i u D_j u^*\mathrm{d}x + \int_{\Omega^*} q(x)uu^*\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)D_i u D_j u^*\mathrm{d}x + \int_{\Omega} q(x)uu^*\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

由不等式 (2.4.13) 和等式 (2.4.14) 立即推出, $\lambda_1(\Omega) > \lambda_1(\Omega^*)$. 证毕.

2.4.4　主特征值与谱半径之间的关系

本节建立主特征值与谱半径之间的密切关系.

定理 2.4.11　设 $q(x) \in C(\bar{\Omega})$, M 是正常数, 使得 $M - q(x) > 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 记 $\lambda_1(q)$ 是问题 (2.1.2) 的主特征值, 那么

(1) $\lambda_1(q) < 0 \Longrightarrow r\big[\big(M - D_j\big(a_{ij}(x)D_i\big)\big)^{-1}(M - q(x))\big] > 1$;

(2) $\lambda_1(q) > 0 \Longrightarrow r\big[\big(M - D_j\big(a_{ij}(x)D_i\big)\big)^{-1}(M - q(x))\big] < 1$;

(3) $\lambda_1(q) = 0 \Longrightarrow r\big[\big(M - D_j\big(a_{ij}(x)D_i\big)\big)^{-1}(M - q(x))\big] = 1$.

证明　为了简化记号, 我们记

$$\mathcal{A} = \big(M - D_j\big(a_{ij}(x)D_i\big)\big)^{-1}(M - q(x)).$$

因为算子 $\mathcal{A}$ 是一个紧线性算子并且关于正锥 P 是强正的, 由定理 2.2.2 知, $r(\mathcal{A}) > 0$, 并且 $r(\mathcal{A})$ 是算子 $\mathcal{A}$ 的最大特征值, 对应的特征函数 $w > 0$, 即 $\mathcal{A}w = r(\mathcal{A})w$, 或者

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(a_{ij}(x)D_i w\big) + Mw = \frac{1}{r(\mathcal{A})}(M - q(x))w, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4.15}$$

再设 u 是对应于 $\lambda_1(q)$ 的正特征函数, 那么

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(a_{ij}(x)D_i u\big) + q(x)u = \lambda_1(q)u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(a_{ij}(x)D_i u\big) + Mu = (M - q(x))u + \lambda_1(q)u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4.16}$$

分别用 u 和 w 乘 (2.4.15) 和 (2.4.16) 的方程两边并在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{r(\mathcal{A})}\int_{\Omega}(M - q(x))wu\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\big[(M - q(x))uw + \lambda_1(q)uw\big]\mathrm{d}x. \tag{2.4.17}$$

因为在 Ω 上 $u, w, M - q(x) > 0$, 由 (2.4.17) 式容易推出定理的结论.

2.5　非完全耦合的二阶线性椭圆型方程组的特征值问题

本节讨论非完全耦合的二阶线性椭圆型方程组的特征值问题. 设函数 $c \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, 算子

$$\mathscr{M} = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(a_{ij}(x)D_i\big) + a(x), \qquad \mathscr{N} = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j\big(b_{ij}(x)D_i\big) + b(x)$$

都是区域 Ω 上的一致椭圆算子, 系数 $a, b, a_{ij}, b_{ij} \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. 定义

$$\mathscr{L}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{M}u + c(x)v \\ \mathscr{N}v \end{pmatrix}.$$

又设边界算子 $\mathscr{B}$ 是齐次 Dirichlet, 或者齐次 Neumann, 或者齐次 Robin 边界算子.

定理 2.5.1　分别记算子 $(\mathscr{M},\mathscr{B})$ 和 $(\mathscr{N},\mathscr{B})$ 的全部特征值为 $\mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \cdots$ 和 $\xi_1 < \xi_2 \leqslant \xi_3 \leqslant \cdots$. 那么算子 $(\mathscr{L},\mathscr{B})$ 的谱仅由特征值构成, 并且 $\sigma(\mathscr{L},\mathscr{B}) = \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

证明　只证 $\mathscr{B}$ 是齐次 Dirichlet 边界算子的情况. 在下面的记号中, 略去算子 $\mathscr{B}$.

第一步　取一个适当大的正常数 A, 使得 $\mu_1 + A > 0, \xi_1 + A > 0$. 设 φ_i 和 ψ_i 分别是算子 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 对应于 μ_i 和 ξ_i 的特征函数. 直接验证知, $\mu_i + A$ 是算子 $\mathscr{M} + A$ 的特征值, 对应的特征函数是 φ_i; $\xi_i + A$ 是算子 $\mathscr{N} + A$ 的特征值, 对应的特征函数是 ψ_i. 由于 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 都是 $L^2(\Omega)$ 中的完备正交系, 所以 $\{\mu_i + A\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\xi_i + A\}_{i=1}^{\infty}$ 分别是算子 $\mathscr{M} + A$ 和 $\mathscr{N} + A$ 的全部特征值.

第二步　设 $\lambda \notin \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$w_1 = (u_1, v_1)^{\mathrm{T}},\ w_2 = (u_2, v_2)^{\mathrm{T}} \in [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^2.$$

那么

$$(\mathscr{L} - \lambda)w_1 = (\mathscr{L} - \lambda)w_2$$

当且仅当

$$\mathscr{M}u_1 + c(x)v_1 - \lambda u_1 = \mathscr{M}u_2 + c(x)v_2 - \lambda u_2,\ \ x \in \Omega, \tag{2.5.1}$$

$$\mathscr{N}v_1 - \lambda v_1 = \mathscr{N}v_2 - \lambda v_2,\ \ x \in \Omega. \tag{2.5.2}$$

因为 $\lambda \notin \sigma(\mathscr{N})$, 由 (2.5.2) 式知 $v_1 = v_2$. 再由 $\lambda \notin \sigma(\mathscr{M})$ 和 (2.5.1) 式知 $u_1 = u_2$, 所以算子 $\mathscr{L} - \lambda$ 是单射. 如果能够证明算子 $\mathscr{L} - \lambda$ 是满射, 那么根据 Banach 逆算子定理, λ 是算子 $\mathscr{L}$ 的正则值.

对于任意的 $w_1 = (u_1, v_1)^{\mathrm{T}} \in [L^2(\Omega)]^2$, 方程 $(\mathscr{L} - \lambda)w_2 = w_1$ 有解 $w_2 = (u_2, v_2)^{\mathrm{T}}$, 当且仅当

$$\mathscr{M}u_2 + c(x)v_2 - \lambda u_2 = u_1,\ \ x \in \Omega;\quad u_2 = 0,\ \ x \in \partial\Omega, \tag{2.5.3}$$

$$\mathscr{N}v_2 - \lambda v_2 = v_1,\ \ x \in \Omega;\quad v_2 = 0,\ \ x \in \partial\Omega \tag{2.5.4}$$

有解. 由于 $\lambda \notin \sigma(\mathscr{N})$, 所以问题 (2.5.4) 有解 v_2. 再由 $\lambda \notin \sigma(\mathscr{M})$ 知问题 (2.5.3) 有解 u_2.

这样就证明了 $\sigma(\mathscr{L}) \subset \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

第三步 直接验证知, μ_i 是 $\mathscr{L}$ 的特征值, 对应的特征函数是 $(\varphi_i, 0)^{\mathrm{T}}$. 对任意的 ξ_j, 如果 $\xi_j \in \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$, 那么 ξ_j 是算子 $\mathscr{L}$ 的特征值. 如果 $\xi_j \notin \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$, 那么问题

$$(\mathscr{M} - \xi_j)\varphi + c(x)\psi_j = 0, \quad x \in \Omega; \quad \varphi = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

有唯一解 φ. 再由 $\mathscr{N}\psi_j = \xi_j\psi_j$ 知

$$\mathscr{L}(\varphi, \psi_j)^{\mathrm{T}} = \xi_j(\varphi, \psi_j)^{\mathrm{T}}.$$

因为 $\psi_j \neq 0$, 所以 ξ_j 是算子 $\mathscr{L}$ 的特征值, 故 $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \sigma(\mathscr{L})$. 证毕.

如果把算子 $\mathscr{L}$ 换成

$$\mathscr{L}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{M}u + c(x)v \\ \mathscr{N}v + d(x)u \end{pmatrix},$$

即完全耦合的椭圆型方程组, 它的特征值还不完全清楚.

2.6 另一类特征值问题

在应用中, 还经常遇到如下形式的特征值问题:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u := -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu + c(x)u = \lambda p(x)u, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域. 同于 2.2 节, 我们假设

(A) $\mathscr{L}$ 是一致椭圆算子;

(B) $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x) \in C(\bar{\Omega})$, $p(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $p(x) \not\equiv 0$.

我们只讨论 $c(x) \geqslant 0$ 的情况. 如果 $c(x) \geqslant 0$ 不成立, 结果非常复杂.

2.6.1 在 Ω 上 $p(x) \geqslant 0$ 的情形

同于 2.2 节, 取 $E = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. 对于任意 $u \in E$, 线性问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}v = p(x)u(x), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一解 $v \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap E$. 定义 $\mathcal{A}u = v$. 因为嵌入 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ 是紧的, 所以算子 $\mathcal{A}$ 是线性紧算子. 定义

$$P = \text{closure}\Big\{u:\ u \in E,\ u|_{\Omega} > 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} < 0\Big\},$$

那么 P 是 E 中的一个闭锥, 并且 $\text{int}P \neq \varnothing$. 事实上, 利用引理 2.2.1 可证

$$\text{int}P = \Big\{u:\ u \in E,\ u|_{\Omega} > 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} < 0\Big\}.$$

由最大值原理知 $\mathcal{A}u \in \text{int}P,\ \ \forall\ u \in P \setminus \{0\}$, 即 $\mathcal{A}$ 关于 P 是强正的. 利用定理 2.2.2 推知, 存在唯一的 $\mu_1 := r(\mathcal{A}) > 0$ 和唯一函数 $v \in \text{int}P$, $\|v\| = 1$, 使得 $\mathcal{A}v = \mu_1 v$, 并且 $\mathcal{A}$ 的其他特征值 μ 都满足 $|\mu| < \mu_1$, 于是 $p(x)v = \mathscr{L}(\mathcal{A}v) = \mu_1\mathscr{L}v$, 即 $\mathscr{L}v = \dfrac{1}{\mu_1}p(x)v$. 这表明特征值问题 (2.6.1) 有特征值 $\lambda_1 = 1/\mu_1 > 0$, 且对应的特征函数 $v(x) > 0,\ x \in \Omega$.

从上面的讨论又可以看出, 特征值问题 (2.6.1) 的特征值与算子 $\mathcal{A}$ 的特征值互为倒数. 注意到 $c(x) \geqslant 0$, 由极值原理容易推出, 问题 (2.6.1) 的实特征值都是正的, 于是算子 $\mathcal{A}$ 的实特征值也都是正的. 又因为 $\mathcal{A}$ 的其他特征值 μ 都满足 $|\mu| < \mu_1$, 所以问题 (2.6.1) 的其他特征值 λ 都满足 $|\lambda| > \lambda_1$. 同时, 与问题 (2.6.1) 的其他特征值对应的特征函数如果是实函数, 一定在 Ω 内变号. 此外, 因为 μ_1 是 $\mathcal{A}$ 的简单特征值, 所以 λ_1 是问题 (2.6.1) 的简单特征值. 至此得到下面的定理.

定理 2.6.1　假设 $c(x) \geqslant 0$, $p(x) \geqslant 0, \neq 0$. 那么问题 (2.6.1) 有简单的实特征值 $\lambda_1 > 0$, 与它对应的特征函数是实函数并且在 Ω 内无零点, 与其他特征值对应的特征函数如果是实函数, 一定在 Ω 内改变符号. 按照 2.2 节中的定义, 这个 λ_1 是主特征值. 因此当 $c(x) \geqslant 0$, $p(x) \geqslant 0, \neq 0$ 时, 问题 (2.6.1) 的主特征值是唯一的并且还是正的.

2.6.2　在 Ω 上 $p(x)$ 变号的情形

方便起见, 我们只讨论下面的一种特殊形式:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda p(x)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

如果把算子 $-\Delta$ 换成 $-D_j\big(a_{ij}D_iu\big)$, 下面的讨论仍然成立.

假设集合 $\mathscr{U}_p = \big\{u \in H_0^1(\Omega):\ \int_{\Omega} p(x)u^2(x)\mathrm{d}x > 0\big\}$ 非空.

我们直接利用标准形式的二阶线性椭圆算子的特征值问题的已知结论, 来讨论特征值问题 (2.6.2) 的特征值. 事实上, 也可以利用变分方法来讨论, 参见后面的定理 9.2.3 的证明.

第一步　证明特征值问题 (2.6.2) 的特征值是离散的.

显然 $\lambda=0$ 不是问题 (2.6.2) 的特征值. 按照如下方式定义算子 $\mathcal{A}: H_0^1(\Omega)\longrightarrow H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{A}u=(-\Delta)^{-1}\big(p(x)u\big),\quad \forall\, u\in H_0^1(\Omega).$$

那么 $\mathcal{A}$ 是线性紧算子, 并且 λ 是问题 (2.6.2) 的特征值当且仅当 $1/\lambda$ 是算子 $\mathcal{A}$ 的特征值. 因为紧算子的特征值是离散的, 最多以 0 为聚点, 所以问题 (2.6.2) 的特征值也是离散的和孤立的.

第二步 证明主特征值的存在性.

先考虑下面的辅助问题:

$$\begin{cases} -\Delta u-\lambda p(x)u=\mu u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}\tag{2.6.3}$$

显然 λ 是问题 (2.6.2) 的特征值当且仅当 $\mu(\lambda)=0$ 是问题 (2.6.3) 的特征值.

由 2.2 节的结果知, 该问题有主特征值, 记为 $\mu_1(\lambda)$, 与它对应的特征函数在 Ω 内不变号, 记为 $\phi_\lambda(x)$ 并认为在 Ω 内 $\phi_\lambda(x)>0$. 同时 $\mu_1(\lambda)$ 关于 λ 连续. 再由特征值的极值性质 (2.4.1 节) 知

$$\mu_1(\lambda)=\inf_{\|u\|_2=1}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega p(x)u^2\mathrm{d}x\right).\tag{2.6.4}$$

因为集合 $\mathscr{U}_p$ 非空, 故存在 $\psi\in\mathscr{U}_p$, 使得

$$\int_\Omega p(x)\psi^2(x)\mathrm{d}x>0.$$

于是存在 $\Lambda>0$, 当 $\lambda\geqslant\Lambda$ 时有

$$\int_\Omega|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega p(x)\psi^2\mathrm{d}x<0.$$

利用此不等式和式 (2.6.4) 便知, 当 $\lambda\geqslant\Lambda$ 时 $\mu_1(\lambda)<0$.

记特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\mu u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值为 μ_0, 由 2.2 节的结果知 $\mu_0>0$. 根据 $\mu_1(\lambda)$ 的定义, $\mu_1(0)=\mu_0>0$. 再利用 $\mu_1(\lambda)$ 关于 λ 的连续性可以推出, 存在第一个正的 λ 记为 $\lambda_1(p)$, 使得 $\mu_1\big(\lambda_1(p)\big)=0$. 与 $\mu_1\big(\lambda_1(p)\big)$ 对应的正特征函数记为 $\phi_1(x)$, 那么 $\lambda_1(p)$ 是问题 (2.6.2) 的一个正特征值, 正函数 $\phi_1(x)$ 是与 $\lambda_1(p)$ 对应的特征函数. 因为 $\mu_1\big(\lambda_1(p)\big)$ 是简单的, 所以 $\lambda_1(p)$ 也是简单的. 同于 2.2 节, 把具有这种性质的特征值称为问

题 (2.6.2) 的**主特征值**. 又因为 $\lambda_1(p)$ 是方程 $\mu_1(\lambda)=0$ 的第一个正根, 故 $\lambda_1(p)$ 是问题 (2.6.2) 的第一个正的主特征值.

第三步　证明正的主特征值是唯一的, 即证明与问题 (2.6.2) 的其他正特征值对应的特征函数都变号.

为此, 我们再考虑一个辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta u+\lambda Mu=\beta(\lambda)\big[M+p(x)\big]u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6.5}$$

其中正常数 M 满足: 在 $\bar{\Omega}$ 上 $M+p(x)>0$. 由于 $M+p(x)>0$, 利用前面的结论知, 对任意的 $\lambda\geqslant 0$, 有 $\beta(\lambda)>0$, 并且特征值问题 (2.6.5) 的主特征值唯一存在而且还是正的, 记为 $\beta_1(\lambda)$, 与它对应的特征函数在 Ω 内不变号, 记为 $\varphi_\lambda(x)$. 不妨认为在 Ω 内 $\varphi_\lambda(x)>0$. 同时 $\beta_1(\lambda)$ 关于 λ 连续、严格单增. 第二步的结果说明,

$$\beta_1\big(\lambda_1(p)\big)=\lambda_1(p).$$

显然 λ 是问题 (2.6.2) 的特征值当且仅当问题 (2.6.5) 的特征值 $\beta(\lambda)=\lambda$. 假设 λ^* 是问题 (2.6.2) 的另一个正的主特征值, 与它对应的特征函数 $\phi^*(x)$ 在 Ω 内不变号, 不妨认为在 Ω 内 $\phi^*(x)>0$. 那么 (λ^*,ϕ^*) 满足

$$\begin{cases} -\Delta\phi^*+\lambda^*M\phi^*=\lambda^*\big[M+p(x)\big]\phi^*, & x\in\Omega, \\ \phi^*=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

根据主特征值 $\beta_1(\lambda)$ 的唯一性, $\beta_1(\lambda^*)=\lambda^*$. 再利用特征值的极小原理,

$$\beta_1(\lambda)=\inf_{u\in H_0^1(\Omega),\,u\neq 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\lambda M\int_\Omega u^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega\big[M+p(x)\big]u^2\mathrm{d}x}.$$

由此容易推出, $\beta_1(\lambda)$ 在 $[0,\infty)$ 上是凸函数, 即对于任意的 λ_1, $\lambda_2\geqslant 0$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$, 有

$$\beta_1(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)\geqslant t\beta_1(\lambda_1)+(1-t)\beta_1(\lambda_2),$$

于是

$$\beta_1(t\lambda_1(p)+(1-t)\lambda^*)\geqslant t\beta_1(\lambda_1(p))+(1-t)\beta_1(\lambda^*)=t\lambda_1(p)+(1-t)\lambda^*. \tag{2.6.6}$$

因为 $\lambda_1(p)$ 是问题 (2.6.2) 的第一个正的主特征值, 所以 $\lambda_1(p)<\lambda^*$. 不等式 (2.6.6) 说明, 在区间 $[\lambda_1(p),\,\lambda^*]$ 上, $\beta_1(\lambda)\geqslant\lambda$. 由于 $\beta_1(0)>0$, 并且 $\lambda_1(p)$ 是 $\beta_1(\lambda)=\lambda$ 的

第一个正根, 因而在区间 $[0,\lambda^*]$ 上 $\beta_1(\lambda)\geqslant\lambda$, 在 $\lambda=\lambda_1(p)$ 处 $\beta_1(\lambda)=\lambda$, 同时在区间 $[0,\lambda_1(p))$ 内 $\beta_1(\lambda)>\lambda$. 这与 $\beta_1(\lambda)$ 的凸性相矛盾.

第四步 证明 $\lambda_1(p)$ 是第一个正特征值.

对于任意给定的 $\lambda>0$, 由 2.2 节的结果知, 问题 (2.6.3) 的特征值可以排列成

$$\mu_1(\lambda)<\mu_2(\lambda)\leqslant\mu_3(\lambda)\leqslant\cdots.$$

如果 $0<\lambda_0<\lambda_1(p)$ 是问题 (2.6.2) 的一个特征值, 那么存在 i, 使得 $\mu_i(\lambda_0)=0$. 因为 $\lambda_1(p)$ 是 $\mu_1(\lambda)=0$ 的第一个正根, 所以 $i\geqslant 2$, 从而有 $\mu_1(\lambda_0)<\mu_i(\lambda_0)=0$. 又因为 $\mu_1(0)>0$, 于是在区间 $(0,\lambda_0)$ 内 $\mu_1(\lambda)=0$ 至少有一个根, 这与 $\lambda_1(p)$ 是 $\mu_1(\lambda)=0$ 的第一个正根相矛盾.

至此得到下面的定理.

定理 2.6.2 假设 $c(x)\geqslant 0$, $p(x)\in L^\infty(\Omega)$, 集合

$$\mathscr{U}_p=\left\{u\in H_0^1(\Omega):\int_\Omega p(x)u^2(x)\mathrm{d}x>0\right\}$$

非空. 那么问题 (2.6.2) 的正主特征值唯一存在, 记为 $\lambda_1(p)$, 并且 $\lambda_1(p)$ 还是正特征值中的最小者.

当 $p(x)$ 变号时, 我们只证明了问题 (2.6.2) 的正主特征值的存在性和唯一性, 并且它还是正特征值中的最小者. 并不清楚其他特征值是否存在, 具有什么样的结构. 这与 $p(x)\geqslant 0,\neq 0$ 的情况完全不同.

一个有趣的结果是: 当 $p(x)$ 变号时, 特征值问题 (2.6.2) 还可能有负的主特征值. 例如, 当

$$\big|\{x\in\Omega:p(x)>0\}\big|>0,\quad \big|\{x\in\Omega:p(x)<0\}\big|>0$$

时, 记 $q(x)=-p(x)$. 前面已经证明, 问题 (2.6.2) 和问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda q(x)u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

分别有正的主特征值 $\lambda_1(p)$ 和 $\lambda_1(q)$. 显然 $-\lambda_1(q)$ 是问题 (2.6.2) 负的主特征值. 这也说明, 当 $p(x)$ 变号时, 问题 (2.6.2) 的主特征值不是唯一的. 从这一点我们可以看出, 特征值问题 (2.6.2) 的特征值的结构是非常复杂的.

2.7 特征值的完备性定理的应用

作为定理 2.4.5 的第一个应用, 我们证明下面的Poincaré不等式.

定理 2.7.1　记 $\lambda_2 > 0$ 是算子 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Neumann 边界条件的第二个特征值, 那么

$$\|u - u_\Omega\|_2^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_2}\|\nabla u\|_2^2, \quad \forall\, u \in H^1(\Omega), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

并且 $1/\lambda_2$ 是使上式成立的最小常数, 也称最佳常数. 这里的 $u_\Omega = \fint_\Omega u\mathrm{d}x$ 是 u 在 Ω 上的平均.

证明　设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ 和 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 分别是算子 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Neumann 边界条件的特征值和对应的特征函数, 并且认为 $\|u_i\|_2 = 1$, $i \geqslant 2$. 先考虑 $u \in H^2(\Omega)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$ 的情况. 把 $u - u_\Omega$ 按照特征函数系 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 展开

$$u - u_\Omega = c_1 + \sum_{i=2}^\infty c_i u_i,$$

其中 c_i 是常数. 因为

$$\int_\Omega (u - u_\Omega)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_\Omega u_i\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, i \geqslant 2,$$

所以 $c_1 = 0$. 利用 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 的正交性质, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_2^2 &= \int_\Omega (u - u_\Omega)(-\Delta u)\mathrm{d}x = -\int_\Omega \left(\sum_{i=2}^\infty c_i u_i\right) \Delta(u - u_\Omega)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=2}^\infty c_i \int_\Omega u_i \Delta(u - u_\Omega)\mathrm{d}x = -\sum_{i=2}^\infty c_i \int_\Omega (u - u_\Omega)\Delta u_i\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=2}^\infty c_i \int_\Omega (u - u_\Omega)\lambda_i u_i\mathrm{d}x = \int_\Omega (u - u_\Omega)\left(\sum_{i=2}^\infty \lambda_i c_i u_i\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=2}^\infty c_i u_i\right)\left(\sum_{i=2}^\infty \lambda_i c_i u_i\right)\mathrm{d}x = \sum_{i=2}^\infty c_i^2 \lambda_i \\
&\geqslant \lambda_2 \sum_{i=2}^\infty c_i^2 = \lambda_2 \|u - u_\Omega\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.7.1}$$

对于任意的 $u \in H^1(\Omega)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$, 存在 $u_m \in H^2(\Omega)$, $\left.\frac{\partial u_m}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$, 使得

$$\|[u_m - (u_m)_\Omega] - [u - u_\Omega]\|_{H^1} \longrightarrow 0.$$

对于每一个 u_m, 不等式 (2.7.1) 成立, 即

$$\|\nabla u_m\|_2^2 \geqslant \lambda_2 \|u_m - (u_m)_\Omega\|_2^2.$$

令 $m \longrightarrow \infty$ 知, 不等式 (2.7.1) 对于这样的 u 成立.

因为当 $u = u_2$ 时,

$$\|\nabla u_2\|_2^2 = \lambda_2 \|u_2\|_2^2 = \lambda_2 \|u_2 - (u_2)_\Omega\|_2^2,$$

所以 $1/\lambda_2$ 是最佳常数. 证毕.

作为定理 2.4.5 的第二个应用, 我们讨论齐次 Neumann 边值问题可解的充分必要条件.

定理 2.7.2 设 $f \in L^2(\Omega)$, 那么边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7.2}$$

有解的充分必要条件是 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = 0$. 同时, 如果它的解 u 存在, 那么 $u \in H^2(\Omega)$, 并且在 $\displaystyle\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x = 0$ 的意义下解是唯一的.

证明 只证充分性. 因为 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = 0$, 可以把 f 分解成 $f = \displaystyle\sum_{i=2}^\infty c_i u_i$, 并记 $u = \displaystyle\sum_{i=2}^\infty \frac{c_i}{\lambda_i} u_i$, 其中 λ_i 和 u_i 同于定理 2.7.1 的证明过程. 显然 $u \in L^2(\Omega)$, 并且满足 $\displaystyle\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x = 0$. 再记 $u^N = \displaystyle\sum_{i=2}^N \frac{c_i}{\lambda_i} u_i$. 因为

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u^N \cdot \nabla u^N \mathrm{d}x &= \sum_{i,j=2}^N \frac{c_i c_j}{\lambda_i \lambda_j} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla u_j \mathrm{d}x \\ &= -\sum_{i,j=2}^N \frac{c_i c_j}{\lambda_i \lambda_j} \int_\Omega u_i \Delta u_j \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i,j=2}^N \frac{c_i c_j}{\lambda_i} \int_\Omega u_i u_j \mathrm{d}x = \sum_{i=2}^N \frac{c_i^2}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

并且级数 $\displaystyle\sum_{i=2}^\infty \frac{c_i^2}{\lambda_i}$ 收敛, 所以

$$\nabla u = \sum_{i=2}^\infty \frac{c_i}{\lambda_i} \nabla u_i \in L^2(\Omega),$$

于是 $u \in H^1(\Omega)$.

对于任意的 $\psi \in H^1(\Omega)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\psi \mathrm{d}x &= \sum_{i=2}^\infty \frac{c_i}{\lambda_i}\int_\Omega \nabla u_i\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x = -\sum_{i=2}^\infty \frac{c_i}{\lambda_i}\int_\Omega \psi\Delta u_i\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=2}^\infty c_i\int_\Omega \psi u_i\mathrm{d}x = \int_\Omega f\psi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这说明 u 是问题 (2.7.2) 的弱解. 再利用椭圆型方程的正则性结论知 $u\in H^2(\Omega)$.

在 $\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x=0$ 的意义下, 解的唯一性可由积分方法获得. 证毕.

作为第三个应用, 我们将证明: 若 $q(x)\in C(\bar\Omega)$, k 为常数, $\lambda_m(q)$ 是问题 (2.3.1) 的第 m 个特征值, 则 $\lambda_m(q+k)=\lambda_m(q)+k$.

事实上, 设 φ_m 是与 $\lambda_m(q)$ 对应的特征函数, 则

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_m+\big(q(x)+k\big)\varphi_m=\big(\lambda_m(q)+k\big)\varphi_m, & x\in\Omega,\\ \varphi_m=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

这说明 $\lambda_m(q)+k$ 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u+\big(q(x)+k\big)u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{2.7.3}$$

的一个特征值, φ_m 是对应的特征函数. 由于函数系 $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一个完备正交系, 所以 $\{\lambda_m(q)+k\}_{m=1}^\infty$ 是问题 (2.7.3) 的全部特征值, 即 $\{k+\lambda_m(q)\}_{m=1}^\infty=\{\lambda_m(q+k)\}_{m=1}^\infty$. 再根据特征值的从小到大的排列顺序知, $\lambda_m(q+k)=\lambda_m(q)+k$.

习 题 2

本练习中, 总假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域.

2.1 记 $\lambda_1>0$ 是算子 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的主特征值. 证明

$$\|u\|_2^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|Du\|_2^2,\quad \forall\, u\in H_0^1(\Omega),$$

并且 $1/\lambda_1$ 是使上式成立的最小常数, 也称最佳嵌入常数.

2.2 假设 $c(x)\geqslant 0$. 利用极值原理证明特征值问题 (2.1.1) 的实特征值都是正的.

2.3 不利用定理 2.3.2 和注 2.3.2, 直接证明推论 2.3.1.

2.4 假设 $q \in C(\bar{\Omega})$. 试证明: 如果齐次边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.A}$$

有非零解, 那么 $\lambda_1(q) \leqslant 0$; 如果问题 (2.A) 有不恒为零的正解, 那么 $\lambda_1(q) = 0$.

2.5 假设 $q \in C(\bar{\Omega})$, 并且存在 $v \in C^2(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0, \not\equiv 0$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta v + q(x)v \geqslant 0, \not\equiv 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

试证明 $\lambda_1(q) > 0$.

2.6 假设 $u^* \not\equiv 0$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = uf(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的非负解. 又设 $f_u(x, u) \leqslant 0$ 关于 $x \in \bar{\Omega}$ 和 $u \geqslant 0$ 成立, 并且对于任意的常数 $b > 0$, 在 $\bar{\Omega} \times (0, b)$ 上 $f_u(x, u) \not\equiv 0$. 试证明 $u = 0$ 是线性化问题

$$\begin{cases} -\Delta u = [f(x, u^*) + u^* f_u(x, u^*)]u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的唯一解.

2.7 假设 $q, q_k \in C(\bar{\Omega})$, 并且当 $k \longrightarrow \infty$ 时, $q_k(x) \longrightarrow q(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立. 又设 $\lambda_1(q) = 0$, 并且对于所有的 k, $\lambda = 0$ 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q_k(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.B}$$

的特征值. 试证明存在正常数 K, 当 $k \geqslant K$ 时, $\lambda = 0$ 是问题 (2.B) 的主特征值.

2.8 证明定理 2.4.7 的第一个结论.

2.9 证明不等式 (2.4.12).

2.10 设 $0 < r < R$, 记 $\lambda_1(R)$ 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & r < |x| < R, \\ u = 0, & |x| = r, \ R \end{cases}$$

的主特征值.

(1) 证明 $\lim\limits_{R\to\infty}\lambda_1(R)=0$;

(2) 证明特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u, & |x|>r, \\ u=0, & |x|=r \end{cases}$$

没有主特征值.

2.11 考虑对称形式的方程组的特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u+a(x)u+b(x)v=\lambda u, & x\in\Omega, \\ -\Delta v+b(x)u+c(x)v=\lambda v, & x\in\Omega, \\ u=v=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

仿照定理 2.4.2, 叙述并证明该特征值问题的极小原理.

2.12 在定理 2.6.2 的条件下, 利用变分方法证明特征值问题 (2.6.2) 有正的主特征值.

2.13 记 $\lambda_1>0$ 是算子 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的主特征值, φ_1 是对应的特征函数, $f\in L^2(\Omega)$. 试证明边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u-\lambda_1 u=f, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

有解当且仅当 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x=0$.

第 3 章　上下解方法

本章介绍椭圆型方程的上下解方法.

上下解方法是研究非线性偏微分方程解的存在性和估计的一种非常重要的方法. 对于一个非线性偏微分方程的定解问题, 只要比较原理成立, 都可以利用上下解方法来处理. 上下解方法非常简单初等, 结果又非常深刻. 这种方法既给出了解的存在性, 又给出了解的估计. 但是, 运用上下解方法的关键是构造合适的上下解. 对于一个比较复杂的非线性偏微分方程的定解问题, 不容易找到合适的上下解.

本章中的部分内容参考了文献 [2,3,9].

3.1　完全非线性方程古典解的比较原理

本节建立完全非线性方程古典解的比较原理. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域, 函数 $f(x,u,h,Q)$ 定义在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n^2}$ 上. 称 $f(x,u,h,Q)$ 在点 $x\in\Omega$ 处是椭圆的, 如果对于任意满足

$$\sum_{i,j=1}^{n}(Q_{ij}-R_{ij})\lambda_i\lambda_j\leqslant 0,\quad \forall\ \lambda\in\mathbb{R}^n$$

的 $Q,R\in\mathbb{R}^{n^2}$, 和任意固定的 $(u,h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, 都有

$$f(x,u,h,Q)\leqslant f(x,u,h,R).$$

如果 $f(x,u,h,Q)$ 在 Ω 的每一点都是椭圆的, 则称 f 在 Ω 上是椭圆的.

考虑边值问题

$$\begin{cases} f(x,u,Du,D^2u)=0, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}u:=au+b\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\phi, & x\in\partial\Omega, \end{cases}\tag{3.1.1}$$

其中 $a,b,\phi\in C(\partial\Omega)$, 并且 $a(x)>0$, $b(x)\geqslant 0$.

定理 3.1.1　假设 $f(x,u,h,Q)\in C(\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n^2})$, f 在 Ω 上是椭圆的, 并且对任意固定的 (x,h,Q), $f(x,u,h,Q)$ 关于 u 严格单减. 又设函数 $v,w\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} f(x,w,Dw,D^2w)\leqslant f(x,v,Dv,D^2v), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}v\leqslant\mathscr{B}w, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

那么 $v \leqslant w$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立.

证明　如若不然, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $x_0 \in \bar{\Omega}$, 使得 $v(x_0) = w(x_0) + \varepsilon$ 并且 $v(x) \leqslant w(x) + \varepsilon$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 如果 $x_0 \in \Omega$, 则

$$Dv(x_0) = Dw(x_0), \quad D^2 v(x_0) \leqslant D^2 w(x_0).$$

由此得

$$\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} v(x_0) - D_{ij} w(x_0)) \lambda_i \lambda_j \leqslant 0, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

根据椭圆的定义, 我们有

$$\begin{aligned} f(x_0, v(x_0), Dv(x_0), D^2 v(x_0)) &\leqslant f(x_0, v(x_0), Dv(x_0), D^2 w(x_0)) \\ &< f(x_0, w(x_0), Dw(x_0), D^2 w(x_0)). \end{aligned}$$

矛盾.

如果 $x_0 \in \partial\Omega$, 则 $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \geqslant \left.\dfrac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{x=x_0}$, 于是

$$\mathscr{B} v(x_0) = a(x_0) v(x_0) + b \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > a(x_0) w(x_0) + b \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} = \mathscr{B} w(x_0).$$

矛盾.

3.2　一个一般形式的比较原理和正解的唯一性

本节给出一个一般形式的比较原理和正解的唯一性结果. 这里给出的比较原理, 对于其他问题 (特别是边界爆破问题) 也有重要的应用.

定理 3.2.1 (比较原理)　假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域, $\eta(x) \in L^\infty(\Omega)$, 函数 $q(x)$ 在 Ω 内非负连续, 常数 $\alpha \in (0, 1]$, 非负函数 $g(s) \in C([0, \infty))$. 又设函数 $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$ 并且在 Ω 内是正的, 在分布意义下满足

$$-\Delta u_1 - \eta(x) u_1^\alpha + q(x) g(u_1) \geqslant 0 \geqslant -\Delta u_2 - \eta(x) u_2^\alpha + q(x) g(u_2), \tag{3.2.1}$$

在边界附近满足

$$\limsup_{d(x, \partial\Omega) \to 0} (u_2^{1+\alpha} - u_1^{1+\alpha}) \leqslant 0. \tag{3.2.2}$$

如果当 $0 < \alpha < 1$ 时, $g(s)/s^\alpha$ 关于

$$s \in \left(\inf_\Omega \{u_1, u_2\}, \sup_\Omega \{u_1, u_2\} \right)$$

单调不减; 当 $\alpha = 1$ 时, $q(x)$ 是非负非平凡的连续函数, $g(s)/s$ 关于

$$s \in \left(\inf_{\Omega}\{u_1, u_2\}, \sup_{\Omega}\{u_1, u_2\}\right)$$

严格单增, 那么 $u_1 \geqslant u_2$ 在 Ω 内成立.

注 3.2.1 由定理 3.2.1 可得边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u - \eta(x)u^{\alpha} + q(x)g(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = \phi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

正解的唯一性 (包括弱解).

证明定理 3.2.1 之前, 我们先证明一个引理.

引理 3.2.1 假设 $0 < \alpha < 1$. 令

$$f(t) = (1+\alpha)^2(t^{\alpha} + t^{-\alpha})^2 - 4(1+\alpha t^{1+\alpha})(1+\alpha t^{-(1+\alpha)}), \quad t > 0,$$

那么 $f(1) = 0$ 并且当 $t > 0, t \neq 1$ 时 $f(t) < 0$. 由此推出, 只要 $t > 0, t \neq 1$, 二次型

$$(1+\alpha t^{1+\alpha})x^2 + (1+\alpha t^{-(1+\alpha)})y^2 \pm (1+\alpha)(t^{\alpha} + t^{-\alpha})xy$$

都是正定的.

证明 显然有 $f(1) = 0$. 直接计算得

$$\begin{aligned} f(t) &= (1+\alpha)^2(t^{2\alpha} + t^{-2\alpha} + 2) - 4(1+\alpha^2) - 4\alpha\left(t^{1+\alpha} + t^{-(1+\alpha)}\right) \\ &= t^{-(1+\alpha)}\Big\{(1+\alpha)^2\left[t^{1+3\alpha} + t^{1-\alpha} + 2t^{1+\alpha}\right] - 4(1+\alpha^2)t^{1+\alpha} \\ &\quad -4\alpha t^{2(1+\alpha)} - 4\alpha\Big\} \\ &:= t^{-(1+\alpha)}f_1(t), \\ f_1'(t) &= (1+\alpha)^2\left[(1+3\alpha)t^{3\alpha} + (1-\alpha)t^{-\alpha} + 2(1+\alpha)t^{\alpha}\right] \\ &\quad -4(1+\alpha^2)(1+\alpha)t^{\alpha} - 8\alpha(1+\alpha)t^{1+2\alpha} \\ &= (1+\alpha)t^{-\alpha}\left[(1+\alpha)(1+3\alpha)t^{4\alpha} + 1 - \alpha^2 + 2(1+\alpha)^2t^{2\alpha}\right. \\ &\quad \left.-4(1+\alpha^2)t^{2\alpha} - 8\alpha t^{1+3\alpha}\right] \\ &= (1+\alpha)t^{-\alpha}\left[(1+\alpha)(1+3\alpha)t^{4\alpha} + 1 - \alpha^2 - 2(1-\alpha)^2t^{2\alpha} - 8\alpha t^{1+3\alpha}\right] \\ &:= (1+\alpha)t^{-\alpha}f_2(t), \end{aligned}$$

显然 $f_2(1) = 0$. 注意到 $0 < \alpha < 1$, 直接计算知, 对于 $t \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= 4\alpha(1+\alpha)(1+3\alpha)t^{4\alpha-1} - 4\alpha(1-\alpha)^2t^{2\alpha-1} - 8\alpha(1+3\alpha)t^{3\alpha} \\ &= 4\alpha\left[(1+\alpha)(1+3\alpha)t^{4\alpha-1} - (1-\alpha)^2t^{2\alpha-1} - 2(1+3\alpha)t^{3\alpha}\right] \\ &< 4\alpha\left[(1+\alpha)(1+3\alpha)t^{4\alpha-1} - 2(1+3\alpha)t^{3\alpha}\right] \\ &= 4\alpha(1+3\alpha)t^{4\alpha-1}(1+\alpha-2t^{1-\alpha}) < 0. \end{aligned}$$

于是当 $t>1$ 时, $f_2(t)<0$. 从而当 $t>1$ 时, $f_1'(t)<0$. 又因为 $f_1(1)=0$, 所以当 $t>1$ 时, $f_1(t)<0$, 进而 $f(t)<0$. 又因为 $f(t)=f(1/t)$, 所以 $f(t)<0$ 对于 $0<t<1$ 也成立. 证毕.

定理 3.2.1 的证明

第一步 设 w_1 和 w_2 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的两个非负函数. 利用不等式 (3.2.1) 以及分部积分推得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla w_1\mathrm{d}x-\int_\Omega \eta(x)u_1^\alpha w_1\mathrm{d}x+\int_\Omega q(x)g(u_1)w_1\mathrm{d}x\\ \geqslant&\int_\Omega \nabla u_2\cdot\nabla w_2\mathrm{d}x-\int_\Omega \eta(x)u_2^\alpha w_2\mathrm{d}x+\int_\Omega q(x)g(u_2)w_2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[\nabla u_2\cdot\nabla w_2-\nabla u_1\cdot\nabla w_1]\mathrm{d}x+\int_\Omega q(x)[g(u_2)w_2-g(u_1)w_1]\mathrm{d}x\\ \leqslant&\int_\Omega \eta(x)[u_2^\alpha w_2-u_1^\alpha w_1]\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

对于任意的 $\varepsilon>0$, 记 $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=\varepsilon/2$, 并取

$$v_i=(u_i+\varepsilon_i)^{-\alpha}[(u_2+\varepsilon_2)^{1+\alpha}-(u_1+\varepsilon_1)^{1+\alpha}]^+,$$

其中 $u^+:=\max\{u,0\}$. 条件 (3.2.2) 说明在边界 $\partial\Omega$ 附近 $v_i=0$. 于是存在 $\Omega_\varepsilon\subset\subset\Omega$, 使得 $v_i\in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$, 并且在 Ω_ε 的外部 $v_i=0$. 因此, 可用 $C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ 中的非负函数在空间 $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ 中逼近 v_i. 从而用 v_i 代替 w_i, $i=1,2$, 不等式 (3.2.3) 仍然成立.

记 $\Omega(0)=\{x\in\Omega: u_2(x)>u_1(x)\}$,

$$\begin{aligned}\Omega(\varepsilon)&=\{x\in\Omega:\ u_2(x)+\varepsilon_2>u_1(x)+\varepsilon_1\}\\&=\{x\in\Omega:\ u_2(x)>u_1(x)+\varepsilon/2\}.\end{aligned}$$

显然当 $\varepsilon'>\varepsilon''>0$ 时, $\Omega(\varepsilon')\subset\Omega(\varepsilon'')$. 注意到不等式 (3.2.3) 中的被积函数 (用 v_i 代替 w_i) 在 $\Omega(\varepsilon)$ 的外部为零, 由不等式 (3.2.3) 得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(\varepsilon)}\big[\nabla u_2\cdot\nabla v_2-\nabla u_1\cdot\nabla v_1\big]\mathrm{d}x\\ &+\int_{\Omega(\varepsilon)}q(x)\left(\frac{g(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^\alpha}-\frac{g(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^\alpha}\right)[(u_2+\varepsilon_2)^{1+\alpha}-(u_1+\varepsilon_1)^{1+\alpha}]\mathrm{d}x\\ \leqslant&\int_{\Omega(\varepsilon)}\eta(x)\left(\frac{u_2^\alpha}{(u_2+\varepsilon_2)^\alpha}-\frac{u_1^\alpha}{(u_1+\varepsilon_1)^\alpha}\right)[(u_2+\varepsilon_2)^{1+\alpha}-(u_1+\varepsilon_1)^{1+\alpha}]\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

记不等式 (3.2.4) 右端的积分为 J_ε.

第二步 证明 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon = 0$. 为此, 先定义

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x\in\Omega\setminus\Omega(\varepsilon), \\ \dfrac{u_2^\alpha}{(u_2+\varepsilon_2)^\alpha} - \dfrac{u_1^\alpha}{(u_1+\varepsilon_1)^\alpha}, & x\in\Omega(\varepsilon). \end{cases}$$

注意到 $\Omega(\varepsilon)$ 的单调性, 易证 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x) = 0$ 在 Ω 内处处成立. 事实上, 任意取定 $x_0\in\Omega$. 如果 $x_0\in\Omega(0)$, 则有 $u_2(x_0) > u_1(x_0)$. 从而存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $x_0\in \Omega(\varepsilon)$, $\forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. 于是

$$F_\varepsilon(x_0) = \frac{u_2^\alpha(x_0)}{[u_2(x_0)+\varepsilon_2]^\alpha} - \frac{u_1^\alpha(x_0)}{[u_1(x_0)+\varepsilon_1]^\alpha}, \quad \forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,$$

因而 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x_0) = 0$. 如果 $x_0\notin\Omega(0)$, 那么对于任意的 $\varepsilon>0$, 有 $x_0\notin\Omega(\varepsilon)$. 因而 $F_\varepsilon(x_0)=0$, $\forall\,\varepsilon>0$. 当然有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x_0) = 0$.

下面证明存在 $M>0$, 使得

$$(u_2+\varepsilon_2)^{1+\alpha} - (u_1+\varepsilon_1)^{1+\alpha} \leqslant M, \quad \forall\,\varepsilon\in(0,1],\ x\in\Omega(\varepsilon). \tag{3.2.5}$$

如若不然, 则存在 $\varepsilon_k^*\in(0,1]$, $x_k\in\Omega(\varepsilon_k^*)$, 使得

$$M_k := \big(u_2(x_k)+\varepsilon_k^*/2\big)^{1+\alpha} - \big(u_1(x_k)+\varepsilon_k^*\big)^{1+\alpha} \longrightarrow \infty,$$

于是 $u_2(x_k)\longrightarrow\infty$, 进而又知 $d(x_k,\partial\Omega)\longrightarrow 0$. 另一方面, M_k 可以写成

$$\begin{aligned} M_k =& \left(1+\frac{\varepsilon_k^*}{2u_2(x_k)}\right)^{1+\alpha} \left[u_2^{1+\alpha}(x_k) - u_1^{1+\alpha}(x_k)\right] \\ &+ \left[\left(1+\frac{\varepsilon_k^*}{2u_2(x_k)}\right)^{1+\alpha} - \left(1+\frac{\varepsilon_k^*}{u_1(x_k)}\right)^{1+\alpha}\right] u_1^{1+\alpha}(x_k). \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

因为 $u_2(x_k) > u_1(x_k)$, 所以式 (3.2.6) 右端第二项是负的. 又因为 $u_2(x_k)\to\infty$, $d(x_k,\partial\Omega)\longrightarrow 0$, 由条件 (3.2.2) 知

$$\limsup_{k\to\infty} \left(1+\frac{\varepsilon_k^*}{2u_2(x_k)}\right)^{1+\alpha} \left[u_2^{1+\alpha}(x_k) - u_1^{1+\alpha}(x_k)\right] \leqslant 0.$$

根据式 (3.2.6), 我们有

$$\limsup_{k\to\infty} M_k \leqslant 0,$$

这是一个矛盾, 因而估计式 (3.2.5) 成立.

前面我们已经知道, $\lim_{\varepsilon\to0^+}F_\varepsilon(x)=0$ 在 Ω 内处处成立. 注意到 $\Omega(\varepsilon)$ 的单调性, 利用估计式 (3.2.5) 可证

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\eta(x)F_\varepsilon(x)\left[\left(u_2(x)+\varepsilon_2\right)^{1+\alpha}-\left(u_1(x)+\varepsilon_1\right)^{1+\alpha}\right]=0,\quad \forall x\in\Omega.$$

由于

$$\left|\frac{u_2^\alpha(x)}{(u_2(x)+\varepsilon_2)^\alpha}-\frac{u_1^\alpha(x)}{(u_1(x)+\varepsilon_1)^\alpha}\right|\leqslant 1,\quad \forall\, x\in\Omega,$$

根据估计式 (3.2.5) 又得

$$\left|\eta(x)F_\varepsilon(x)\left[\left(u_2(x)+\varepsilon_2\right)^{1+\alpha}-\left(u_1(x)+\varepsilon_1\right)^{1+\alpha}\right]\right|\leqslant M\|\eta\|_\infty,\quad \forall x\in\Omega.$$

利用控制收敛定理便推知

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\Omega(\varepsilon)}\eta(x)\left(\frac{u_2^\alpha}{(u_2+\varepsilon_2)^\alpha}-\frac{u_1^\alpha}{(u_1+\varepsilon_1)^\alpha}\right)[(u_2+\varepsilon_2)^{1+\alpha}-(u_1+\varepsilon_1)^{1+\alpha}]\mathrm{d}x\\ =&\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\Omega\eta(x)F_\varepsilon(x)[(u_2+\varepsilon_2)^{1+\alpha}-(u_1+\varepsilon_1)^{1+\alpha}]\mathrm{d}x\\ =&0,\end{aligned}$$

即 $\lim_{\varepsilon\to0^+}J_\varepsilon=0$.

第三步　因为在 $\Omega(\varepsilon)$ 内 $u_2/(u_2+\varepsilon_2)>u_1/(u_1+\varepsilon_1)$, 函数 g 是非负的, 并且 $g(s)/s^\alpha$ 是单调不减的, 所以

$$\frac{g(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^\alpha}-\frac{g(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^\alpha}\geqslant\frac{g(u_1)}{u_1^\alpha}\left(\frac{u_2^\alpha}{(u_2+\varepsilon_2)^\alpha}-\frac{u_1^\alpha}{(u_1+\varepsilon_1)^\alpha}\right)\geqslant0,\quad x\in\Omega(\varepsilon).$$

这说明不等式 (3.2.4) 左端第二项中的被积函数是非负的.

直接计算知, 对于 $x\in\Omega(\varepsilon)$, 有

$$\nabla u_1\cdot\nabla v_1=-\left[1+\alpha\left(\frac{u_2+\varepsilon_2}{u_1+\varepsilon_1}\right)^{1+\alpha}\right]|\nabla u_1|^2+(1+\alpha)\left(\frac{u_2+\varepsilon_2}{u_1+\varepsilon_1}\right)^\alpha\nabla u_1\cdot\nabla u_2,$$

$$\nabla u_2\cdot\nabla v_2=\left[1+\alpha\left(\frac{u_1+\varepsilon_1}{u_2+\varepsilon_2}\right)^{1+\alpha}\right]|\nabla u_2|^2-(1+\alpha)\left(\frac{u_1+\varepsilon_1}{u_2+\varepsilon_2}\right)^\alpha\nabla u_1\cdot\nabla u_2,$$

$$\begin{aligned}\nabla u_2\cdot\nabla v_2-\nabla u_1\cdot\nabla v_1=&\left[1+\alpha\left(\frac{u_2+\varepsilon_2}{u_1+\varepsilon_1}\right)^{1+\alpha}\right]|\nabla u_1|^2\\&+\left[1+\alpha\left(\frac{u_1+\varepsilon_1}{u_2+\varepsilon_2}\right)^{1+\alpha}\right]|\nabla u_2|^2\\&-(1+\alpha)\left[\left(\frac{u_2+\varepsilon_2}{u_1+\varepsilon_1}\right)^\alpha+\left(\frac{u_1+\varepsilon_1}{u_2+\varepsilon_2}\right)^\alpha\right]\nabla u_1\cdot\nabla u_2.\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

第四步 考虑 $\alpha < 1$ 的情况. 应用引理 3.2.1 于等式 (3.2.7) 的右端便得

$$\nabla u_2 \cdot \nabla v_2 - \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \geqslant 0, \quad x \in \Omega(\varepsilon).$$

如果能够证明 $\Omega(0) = \varnothing$, 那么结论成立. 用反证法. 假设 $\Omega(0) \neq \varnothing$, 利用 u_1 和 u_2 的连续性知, $\Omega(0)$ 是开集. 设 B 是包含于 $\Omega(0)$ 中的任意闭球, 那么当 ε 很小时, $B \subset \Omega(\varepsilon)$. 因为不等式 (3.2.4) 左端中的被积函数是非负的, 并且当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时右端的积分趋于零, 于是由不等式 (3.2.4) 式推知

$$\begin{aligned}\int_B \Big[& \left(1+\alpha\xi^{1+\alpha}\right)|\nabla u_1|^2 + \left(1+\alpha\xi^{-(1+\alpha)}\right)|\nabla u_2|^2 \\ & -(1+\alpha)\left(\xi^{-\alpha}+\xi^{\alpha}\right)\nabla u_1\cdot\nabla u_2\Big]\mathrm{d}x \leqslant 0, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

这里 $\xi = \dfrac{u_2(x)}{u_1(x)} > 1$, $x \in B$. 再次利用引理 3.2.1 得, $\nabla u_1 = \nabla u_2 = 0$ 在 B 上成立. 从而

$$\nabla u_1(x) = \nabla u_2(x) = 0, \quad x \in \Omega(0).$$

于是在 $\Omega(0)$ 的任意连通分支 $\Omega_i(0)$ 上 $u_1 = c_{i1}$, $u_2 = c_{i2}$ 并且 $c_{i1} < c_{i2}$, 这里 c_{i1} 和 c_{i2} 都是正常数. 任意固定一个点 $x_0 \in \partial\Omega_i(0)$, 显然 $x_0 \in \partial\Omega(0)$. 如果 $x_0 \notin \partial\Omega$, 则 $u_1(x_0) = u_2(x_0)$. 然而, 当 $x_0 \notin \partial\Omega$ 时, 利用 u_1 和 u_2 的连续性知, $u_1(x_0) = c_{i1} < c_{i2} = u_2(x_0)$, 矛盾. 当 $x_0 \in \partial\Omega$ 时, 存在 $x_k \in \Omega_i(0)$ 使得 $x_k \longrightarrow x_0$. 于是 $u_1(x_k) = c_{i1} < c_{i2} = u_2(x_k)$, 从而

$$\lim_{x_k\to x_0\in\partial\Omega}\left[u_2^{\alpha+1}(x_k) - u_1^{\alpha+1}(x_k)\right] = \lim_{x_k\to x_0\in\partial\Omega}\left[c_{i2}^{\alpha+1} - c_{i1}^{\alpha+1}\right] > 0.$$

此与假设条件 (3.2.2) 矛盾, 所以 $\Omega(0) = \varnothing$.

第五步 考虑 $\alpha = 1$ 的情况. 如果 $\Omega(0) \neq \varnothing$, 那么对于任意闭球 $B \subset \Omega(0)$, 此时的不等式 (3.2.8) 成为

$$\int_B \left(\left|\nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2 + \left|\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2 \right)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

由此得

$$\nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_2 = \nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1 = 0, \quad \forall\, x \in B.$$

再由 $B \subset \Omega(0)$ 的任意性推知

$$\nabla\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = 0, \quad x \in \Omega(0).$$

同上, 对于 $\Omega(0)$ 的任意连通分支 $\Omega_i(0)$, 在 $\Omega_i(0)$ 上 $u_1/u_2 = c_i < 1$, 这里 c_i 是正常数. 任意固定一个点 $x_0 \in \partial\Omega_i(0)$, 显然 $x_0 \in \partial\Omega(0)$. 如果 $x_0 \notin \partial\Omega$, 则有 $u_1(x_0) = u_2(x_0)$, 即 $\dfrac{u_1(x_0)}{u_2(x_0)} = 1$. 然而, 当 $x_0 \notin \partial\Omega$ 时, 由 u_1 和 u_2 的连续性知, $\dfrac{u_1(x_0)}{u_2(x_0)} = c_i < 1$, 矛盾. 当 $x_0 \in \partial\Omega$ 时, 存在 $x_k \in \Omega_i(0)$ 使得 $x_k \longrightarrow x_0$, 于是 $u_1(x_k) = c_i u_2(x_k)$. 若

$$\limsup_{x_k \to x_0 \in \partial\Omega} u_2^2(x_k) > 0,$$

则

$$\limsup_{x_k \to x_0 \in \partial\Omega} \left[u_2^2(x_k) - u_1^2(x_k)\right] = \limsup_{x_k \to x_0 \in \partial\Omega} u_2^2(x_k)\left(1 - c_i^2\right) > 0.$$

此与假设条件 (3.2.2) 矛盾. 若

$$\limsup_{x_k \to x_0 \in \partial\Omega} u_2^2(x_k) = 0,$$

则

$$\limsup_{x_k \to x_0 \in \partial\Omega} u_1^2(x_k) = 0.$$

从上面的分析我们看出, 如果存在 $\Omega(0)$ 的连通分支 $\Omega_i(0)$, 以及 $x_0 \in \partial\Omega_i(0)$, 满足

1) $x_0 \notin \partial\Omega$, 或者

2) $x_0 \in \partial\Omega$, 但是存在 $x_k \in \Omega_i(0)$, 使得 $x_k \longrightarrow x_0$, 并且

$$\limsup_{x_k \to x_0 \in \partial\Omega} u_2^2(x_k) > 0,$$

那么可以导出与假设条件 (3.2.2) 的矛盾.

如果对于 $\Omega(0)$ 的任意连通分支 $\Omega_i(0)$ 和任意的 $x_0 \in \partial\Omega_i(0)$, 都有 $x_0 \in \partial\Omega$, 并且对于任意满足 $x_k \longrightarrow x_0$ 的序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega_i(0)$, 都有

$$\limsup_{x_k \to x_0 \in \partial\Omega} u_2^2(x_k) = 0,$$

那么 $\Omega(0) = \Omega$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u_1 = u_2 = 0$, 并且存在常数 $0 < c < 1$, 使得 $u_1 = cu_2$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立.

因为当 $\alpha = 1$ 时, $q(x)$ 是非负非平凡的连续函数, 所以存在 $\bar{x} \in \Omega$, 使得 $q(\bar{x}) > 0$. 根据 $g(s)/s$ 关于

$$s \in \left(\inf_{\Omega}\{u_1, u_2\}, \sup_{\Omega}\{u_1, u_2\}\right)$$

的严格单增性质, 我们有

$$\begin{aligned}\left(-\Delta u_1-\eta(x)u_1+q(x)g(u_1)\right)\Big|_{\bar{x}}&=c\left(-\Delta u_2-\eta(x)u_2\right)\Big|_{\bar{x}}+q(x)\frac{g(u_1)}{u_1}u_1\Big|_{\bar{x}}\\&<c\left(-\Delta u_2-\eta(x)u_2\right)\Big|_{\bar{x}}+q(x)\frac{g(u_2)}{u_2}cu_2\Big|_{\bar{x}}\\&=c\left(-\Delta u_2-\eta(x)u_2+q(x)g(u_2)\right)\Big|_{\bar{x}}.\end{aligned}$$

此与条件 (3.2.1) 矛盾. 定理得证.

3.3 方程式的上下解方法

从本节开始, 若没有特别说明, 我们提到的解都是古典解, 即属于空间 $C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ (Dirichlet 边界条件) 或者空间 $C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ (Robin 边界条件或 Neumann 边界条件) 的解.

利用上下解得到解的存在性的方法称为上下解方法. 本节建立椭圆型方程式的边值问题的上下解方法. 首先对拟线性方程, 利用不动点定理证明: 如果所讨论的问题具有有序的上下解, 那么它在上下解之间一定有解. 其次对半线性方程, 借助有序上下解构造单调迭代序列, 进而得到位于上下解之间的最大解和最小解. 前一种方法称为上下解方法中的不动点方法, 后一种方法称为上下解方法中的单调迭代方法.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域, 边界 $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$, 算子

$$\mathscr{L}=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}D_{ij}+\sum_{i=1}^{n}b_iD_i+c \tag{3.3.1}$$

是 Ω 上的一致椭圆算子, 系数属于 $C^\alpha(\bar{\Omega})$. 边界算子 $\mathscr{B}u=au+b\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$, 其中 $a,b\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ 都是非负函数, 并且 $a(x)+b(x)>0$.

3.3.1 解的存在性

定义 3.3.1 称函数 f 关于 $(x,u,\eta)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 满足 Nagumo 条件, 如果存在连续函数 $\psi:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$, 使得

$$|f(x,u,\eta)|\leqslant\psi(|u|)(1+|\eta|^2),\quad\forall\ (x,u,\eta)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n. \tag{3.3.2}$$

考虑下面的边值问题:

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(x,u,Du), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}u=\phi, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{3.3.3}$$

其中 $f(x,u,\eta)\in C^\alpha(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, ϕ 可以延拓成 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的函数. 我们先给出关于问题 (3.3.3) 的解的先验估计的一个结果.

定理 3.3.1 假设 $c(x) \geqslant 0$, 函数 f 关于 $(x,u,\eta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 满足 Nagumo 条件, $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是问题 (3.3.3) 的解, 并且 $\|u\|_\infty \leqslant C$. 则存在仅与 C, ψ 和 $\mathscr{L}$ 的系数有关的常数 N, 使得

$$\|Du\|_\infty \leqslant N,$$

这个常数 N 称为 Nagumo 常数.

该定理可由文献 [10] 中第 5 章的定理 2.6、定理 3.1 和定理 3.2 直接推出.

定理 3.3.2 假设 $c(x) > 0$, 函数 f 关于 $(x,u,\eta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 满足 Nagumo 条件, 并且存在常数 $\gamma, \tau: \gamma < 0 < \tau$, 使得

$$\begin{cases} f(x,\tau,0) \leqslant 0 \leqslant f(x,\gamma,0), & x \in \Omega, \\ a(x)\gamma \leqslant \phi(x) \leqslant a(x)\tau, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

则边值问题 (3.3.3) 存在解 u 并且满足 $\gamma \leqslant u(x) \leqslant \tau$, $\|Du\|_\infty \leqslant N$. 这里的 N 是 Nagumo 常数, 仅与 γ, τ, ψ 和 $\mathscr{L}$ 的系数有关.

证明 不失一般性, 可设 $a(x) > 0$. 这是因为, 若存在 $x_0 \in \partial\Omega$, 使得 $a(x_0) = 0$, 我们可以先考虑下面的问题:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f(x,u,Du), & x \in \Omega, \\ (\mathscr{B} + \varepsilon)u = \phi, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3.5}$$

其中 ε 是适当小的正常数. 这时对应的 $a_\varepsilon(x) = a(x) + \varepsilon > 0$. 定理的条件对问题 (3.3.5) 仍然成立.

如果能够证明问题 (3.3.5) 有解 u_ε, 并且满足 $\gamma \leqslant u_\varepsilon(x) \leqslant \tau$, $\|Du_\varepsilon\|_\infty \leqslant N$, 那么函数 $f_\varepsilon(x) := f(x, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x))$ 满足 $\|f_\varepsilon(x)\|_\infty \leqslant C$, 从而 $|u_\varepsilon|_{2+\alpha} \leqslant C$, 常数 C 与 ε 无关. 令 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 可知, 在空间 $C^{2+\alpha/2}(\bar{\Omega})$ 中 $u_\varepsilon \longrightarrow u$, 并且 u 是问题 (3.3.3) 的解. 估计式 $\gamma \leqslant u(x) \leqslant \tau$, $\|Du\|_\infty \leqslant N$ 自然成立.

对于任意的 $v \in C^1(\bar{\Omega})$, 考虑下面的边值问题:

$$\begin{cases} \mathscr{L}w = f(x, v(x), Dv(x)), & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}w = \phi, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

由于 $F(x) = f(x, v(x), Dv(x)) \in L^\infty(\Omega)$, 所以问题 (3.3.6) 有唯一解 $w \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 记成 $w = Tv$. 先利用 L^p 全局估计, 再利用嵌入定理可知, $T: C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ 是连续的, 并且对于 $C^1(\bar{\Omega})$ 中的任一有界集 K, 存在仅依赖于 K 的界的正常数 C, 使得对所有 $v \in K$, 都有 $|Tv|_{1+\alpha} \leqslant C$. 细节可见定理 3.7.1 的证明过程. 这说明 $T: C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ 是紧算子.

取集合

$$U = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : \gamma < u < \tau, \ \|Du\|_\infty < N+1\},$$

那么 U 是 $C^1(\bar{\Omega})$ 中的开集. 由上面的讨论知, $T : \overline{U} \longrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ 是紧算子.

下面证明对于任意的 $\lambda \in (0,1)$ 和 $u \in \partial U$, 都有 $u \neq \lambda Tu$. 假设存在 $\lambda \in (0,1)$ 和 $u \in \partial U$, 使得 $u = \lambda Tu$, 那么 $\gamma \leqslant u(x) \leqslant \tau$, $\|Du\|_\infty \leqslant N+1$, 并且 u 是问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \lambda f(x, u(x), Du(x)), & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = \lambda \phi, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3.7}$$

的解. 由于 $|\lambda\phi| \leqslant |\phi|$, 并且

$$|\lambda f(x, u(x), Du(x)| \leqslant \psi(|u|)(1 + |Du|^2),$$

根据定理 3.3.1 知, $\|Du\|_\infty \leqslant N < N+1$. 这说明一定存在点 $x_0 \in \bar{\Omega}$, 使得 $u(x_0) = \gamma$ 或者 $u(x_0) = \tau$.

我们先讨论 $x_0 \in \Omega$ 并且 $u(x_0) = \tau$ 的情况. 因为 $u(x) \leqslant \tau$, 所以

$$Du(x_0) = 0, \quad \left(D_{ij}u(x_0)\right)_{n\times n} \leqslant 0,$$

从而 $\mathscr{L}u(x_0) \geqslant c(x_0)u(x_0) = c(x_0)\tau > 0$. 另一方面, 由问题 (3.3.7) 的方程知

$$\begin{aligned} \mathscr{L}u(x_0) &= \lambda f(x_0, u(x_0), Du(x_0)) \\ &= \lambda f(x_0, \tau, 0) \leqslant 0, \end{aligned}$$

矛盾. 对于 $x_0 \in \Omega$ 且 $u(x_0) = \gamma$ 的情况, 同理可以推出矛盾.

现在假设 $x_0 \in \partial\Omega$ 并且 $u(x_0) = \tau$. 那么 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \geqslant 0$. 从而 $a(x_0)\tau \leqslant \mathscr{B}u(x_0) = \lambda\phi(x_0)$. 因为 τ, λ, $a(x_0) > 0$, 所以 $\phi(x_0) > 0$. 于是又有

$$a(x_0)\tau \leqslant \mathscr{B}u(x_0) = \lambda\phi(x_0) < \phi(x_0).$$

此与 (3.3.4) 的第二式矛盾. 对于 $x_0 \in \partial\Omega$ 并且 $u(x_0) = \gamma$ 的情况, 同理可以导出矛盾.

因为 $0 \in U$, 利用不动点定理 4.2.3 知, T 在 $\overline{U}$ 上有不动点 u. 因而 u 是所要找的解. 证毕.

这里所用的方法称为上下解方法中的不动点方法.

定义 3.3.2 函数 $\bar{u}$, $\underline{u} \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 分别称为问题 (3.3.3) 的上解和下解, 如果 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 分别满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}\bar{u} \geqslant f(x, \bar{u}, D\bar{u}), & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}\bar{u} \geqslant \phi, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \mathscr{L}\underline{u} \leqslant f(x,\underline{u},D\underline{u}), & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}\underline{u} \leqslant \phi, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

如果边界条件是 $\mathscr{B}u = u$, 那么上下解的光滑性条件可以减弱为 $\bar{u}, \underline{u} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

定理 3.3.3　假设在 $\partial\Omega$ 上 $a(x) > 0$, 函数 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 分别是问题 (3.3.3) 的上解和下解, 并且满足 $\underline{u} \leqslant \bar{u}$. 记 $\underline{c} = \min\limits_{\bar{\Omega}} \underline{u}$, $\bar{c} = \max\limits_{\bar{\Omega}} \bar{u}$. 又设 $f(x,u,\eta)$ 关于 $x \in \bar{\Omega}$, $u \in [\underline{c}, \bar{c}]$ 以及 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 满足 Nagumo 条件, 即存在连续函数 $\psi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, 使得

$$|f(x,u,\eta)| \leqslant \psi(|u|)(1+|\eta|^2), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},\ u \in [\underline{c}, \bar{c}],\ \eta \in \mathbb{R}^n,$$

那么问题 (3.3.3) 存在解 u, 并且还满足

$$\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}, \quad \|Du\|_\infty \leqslant N, \tag{3.3.8}$$

其中 N 是依赖于 $\underline{u}, \bar{u}, \psi$ 和 $\mathscr{L}$ 的系数的 Nagumo 常数.

证明　取常数 $M > 0$, 使 $M + c(x) > 0$. 定义函数

$$f^*(x,u,\eta) = \begin{cases} f(x,\bar{u}(x),\eta) + M\bar{u}(x) - (u - \bar{u}(x)), & u > \bar{u}(x), \\ f(x,u,\eta) + Mu, & \underline{u}(x) \leqslant u \leqslant \bar{u}(x), \\ f(x,\underline{u}(x),\eta) + M\underline{u} - (u - \underline{u}(x)), & u < \underline{u}(x), \end{cases}$$

显然 $f^*(x,u,\eta)$ 关于 $(x,u,\eta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 满足 Nagumo 条件. 考察边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + Mu = f^*(x,u,Du), & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}u = \phi, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

取 $\tau > 0$ 充分大, 使得 $f^*(x,\tau,0) \leqslant 0 \leqslant f^*(x,-\tau,0)$ 并且 $-\tau a(x) \leqslant \phi(x) \leqslant \tau a(x)$. 根据定理 3.3.2, 问题 (3.3.9) 有解 u 并且满足 $-\tau \leqslant u \leqslant \tau$. 下面证明 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$.

先证 $u \leqslant \bar{u}$. 如若不然, 则存在 $x_0 \in \bar{\Omega}$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得在 $\bar{\Omega}$ 上 $u \leqslant \bar{u} + \varepsilon$, $u(x_0) = \bar{u}(x_0) + \varepsilon$. 如果 $x_0 \in \Omega$, 则

$$Du(x_0) = D\bar{u}(x_0), \quad \mathscr{L}(u - \bar{u})(x_0) + M(u - \bar{u})(x_0) > 0.$$

但是,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}u(x_0) + Mu(x_0) &= f^*(x_0, u(x_0), Du(x_0)) \\ &= f(x_0, \bar{u}(x_0), D\bar{u}(x_0)) + M\bar{u}(x_0) - \varepsilon \\ &\leqslant \mathscr{L}\bar{u}(x_0) + M\bar{u}(x_0) - \varepsilon. \end{aligned}$$

矛盾. 如果 $x_0 \in \partial\Omega$, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \geqslant \left.\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\right|_{x=x_0}$, 于是

$$\begin{aligned}\phi(x_0) &= a(x_0)u(x_0) + b(x_0)\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \\ &\geqslant a(x_0)[\bar{u}(x_0) + \varepsilon] + b(x_0)\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \\ &= \mathscr{B}\bar{u}(x_0) + \varepsilon a(x_0) \\ &\geqslant \phi(x_0) + \varepsilon a(x_0) > \phi(x_0),\end{aligned}$$

也是一个矛盾.

同理可证 $u \geqslant \underline{u}$. 因此 $f^*(x,u,Du) = f(x,u,Du) + Mu$, 故 u 是问题 (3.3.3) 的解. 估计式 (3.3.8) 显然成立. 定理得证.

经常用到的是定理 3.3.3 的下面的推论.

推论 3.3.1 假设 $f = f(x,u)$ 不依赖于 Du, 函数 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 分别是边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = \phi, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3.10}$$

的上解和下解, 并且满足 $\underline{u} \leqslant \bar{u}$. 记 $\underline{c} = \min\limits_{\bar{\Omega}} \underline{u}$, $\bar{c} = \max\limits_{\bar{\Omega}} \bar{u}$. 如果存在常数 $M > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, 使得

$$|f(x,u) - f(y,v)| \leqslant M\big(|x-y|^\alpha + |u-v|^\beta\big), \quad \forall\, x,y \in \bar{\Omega},\ u,v \in [\underline{c}, \bar{c}],$$

那么问题 (3.3.10) 存在解 u, 并且还满足 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$.

3.3.2 单调迭代序列

这里将要用到的方法称为单调迭代方法, 单调迭代方法实际上是构造单调迭代序列, 证明迭代序列收敛并且其极限函数是所研究的问题的解. 简单起见, 本节只讨论一种特殊情形, 即函数 $f(x,u,Du) = f(x,u)$ 不依赖于 Du.

定理 3.3.4 假设 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 分别是问题 (3.3.3) 的上解和下解, 并且满足 $\underline{u} \leqslant \bar{u}$. 记 $\underline{c} = \min\limits_{\bar{\Omega}} \underline{u}$, $\bar{c} = \max\limits_{\bar{\Omega}} \bar{u}$. 又设存在正常数 M, 使得

$$f(x,u) - f(x,v) \geqslant -M(u-v), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},\ u,v \in [\underline{c}, \bar{c}],\ u \geqslant v,$$

此式通常称为半边 Lipschitz 条件. 则存在序列 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^\infty$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^\infty$, 满足

$$\begin{gathered}\underline{u}_m \nearrow,\ \ \bar{u}_m \searrow,\ \ \underline{u} \leqslant \underline{u}_m \leqslant \bar{u}_m \leqslant \bar{u},\ \ \forall\, m, \\ \underline{u}_m \longrightarrow \tilde{u},\ \ \bar{u}_m \longrightarrow \hat{u} \ \text{ 当 } m \longrightarrow \infty \text{ 时},\end{gathered} \tag{3.3.11}$$

并且 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 是问题 (3.3.3) 位于 $\underline{u}$ 和 $\bar{u}$ 之间的最小解和最大解.

证明　不妨认为 $M+c(x)>0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 定义

$$\langle \underline{u},\bar{u}\rangle=\left\{u\in C(\bar{\Omega}):\underline{u}(x)\leqslant u(x)\leqslant \bar{u}(x),\ \forall x\in\bar{\Omega}\right\}.$$

对于任意给定的 $v\in C(\bar{\Omega})$, 边值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u+Mu=f(x,v)+Mv, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}u=\phi, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

有唯一解 $u\in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 记成 $u=Tv$.

先证明 T 在 $\langle \underline{u},\bar{u}\rangle$ 上是单调的, 即证明当 $v,w\in\langle \underline{u},\bar{u}\rangle$ 且 $v\leqslant w$ 时, $Tv\leqslant Tw$ 成立. 事实上, 令 $z=Tw$, 则 $h=z-u$ 满足

$$\begin{cases}\mathscr{L}h+Mh=f(x,w)-f(x,v)+M(w-v)\geqslant 0, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}h=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

由最大值原理知 $h\geqslant 0$, 即 $Tv=u\leqslant z=Tw$.

定义

$$\underline{u}_1=T\underline{u},\ \ \underline{u}_{m+1}=T\underline{u}_m,\ \ \bar{u}_1=T\bar{u},\ \ \bar{u}_{m+1}=T\bar{u}_m.$$

根据 T 的单调性, $\underline{u}_1\leqslant\bar{u}_1$. 现在证明序列 $\left\{\underline{u}_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\left\{\bar{u}_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ 满足式 (3.3.11). 令 $v=\bar{u}-\bar{u}_1$, 因为 $\bar{u}$ 满足

$$\begin{cases}\mathscr{L}\bar{u}+M\bar{u}\geqslant f(x,\bar{u})+M\bar{u}, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}\bar{u}\geqslant\phi, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

所以 v 满足

$$\begin{cases}\mathscr{L}v+Mv\geqslant f(x,\bar{u})-f(x,\bar{u})=0, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}v\geqslant 0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

由最大值原理知 $v\geqslant 0$, 即 $\bar{u}_1\leqslant\bar{u}$. 同理可证 $\underline{u}\leqslant\underline{u}_1$. 于是有 $\underline{u}\leqslant\underline{u}_1\leqslant\bar{u}_1\leqslant\bar{u}$. 利用 T 的单调性, 归纳推知式 (3.3.11) 成立.

因为 $\underline{u}_m,\bar{u}_m\in\langle\underline{u},\bar{u}\rangle$, 所以

$$\|f(x,\underline{u}_m(x))\|_\infty\leqslant C,\ \ \|f(x,\bar{u}_m(x))\|_\infty\leqslant C.$$

先利用 L^p 理论知

$$\|\underline{u}_m\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C_1,\ \ \|\bar{u}_m\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C_1.$$

由于 $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 故

$$f(x, \underline{u}_m(x)), \quad f(x, \bar{u}_m(x)) \in C^\alpha(\bar{\Omega}),$$

并且

$$|f(x, \underline{u}_m(x))|_\alpha \leqslant C_2, \quad |f(x, \bar{u}_m(x))|_\alpha \leqslant C_2.$$

再利用 Schauder 理论,

$$|\underline{u}_m|_{2+\alpha} \leqslant C_3, \quad |\bar{u}_m|_{2+\alpha} \leqslant C_3.$$

上面的正常数 C, C_1, C_2 和 C_3 都不依赖于 m. 因为 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ 是紧的, 所以 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^\infty$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^\infty$ 都存在子序列在 $C^2(\bar{\Omega})$ 中分别收敛到 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$. 又因为 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^\infty$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^\infty$ 都是单调有界的, 所以在点点的意义下它们都有极限. 根据极限的唯一性, 它们的极限分别是 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$. 再次利用极限的唯一性又知, 在 $C^2(\bar{\Omega})$ 中 $\underline{u}_m \longrightarrow \tilde{u}$, $\bar{u}_m \longrightarrow \hat{u}$. 在 $\underline{u}_{m+1} = T\underline{u}_m$ 和 $\bar{u}_{m+1} = T\bar{u}_m$ 中令 $m \longrightarrow \infty$ 推得, $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 都是问题 (3.3.3) 的解.

下面证明 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 是问题 (3.3.3) 位于 $\underline{u}$ 和 $\bar{u}$ 之间的最小解和最大解. 事实上, 如果 $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ 是问题 (3.3.3) 的解, 则 $u = Tu$. 利用 T 的单调性得

$$\underline{u}_1 = T\underline{u} \leqslant Tu = u \leqslant T\bar{u} = \bar{u}_1, \quad \underline{u}_m = T\underline{u}_{m-1} \leqslant Tu = u \leqslant T\bar{u}_{m-1} = \bar{u}_m,$$

所以 $\tilde{u} \leqslant u \leqslant \hat{u}$. 证毕.

这里需要指出, 在单调迭代方法中, 要求 f 关于 u 满足半边 Lipschitz 条件. 与不动点方法相比较, 单调迭代方法似乎因条件强没有明显优点. 实际上, 单调迭代方法的优点在于:

(1) 容易看出由单调迭代序列给出的解的进一步性质和估计;

(2) 方便近似计算.

3.4 应用 I —— 几个例子

在本节和下一节, 对于 $q \in C(\bar{\Omega})$, 总用 $\lambda_1(q)$ 表示在 Ω 中算子 $-\Delta + q$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的主特征值. 由特征值的性质我们知道, $\lambda_1(q)$ 关于 q 连续且严格递增, 即当 $q_1 \leqslant q_2$ 且 $q_1 \neq q_2$ 时, 有

$$\lambda_1(q_1) < \lambda_1(q_2).$$

当 $q = 0$ 时, 记 $\lambda_1(0) = \lambda_1$, 并用 $\varphi_1(x)$ 表示对应于 λ_1 的正特征函数.

例 1　作为应用, 我们先考虑下面的边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = uf(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

其中 f 关于 u 属于 C^1, 关于 x 属于 $C^\alpha(\bar{\Omega})$, $0<\alpha<1$.

定理 3.4.1　*假设 f 关于 $u>0$ 是严格单减的, 且存在某正常数 C, 当 $(x,u)\in\bar{\Omega}\times[C,\infty)$ 时, $f(x,u)\leqslant 0$.*

(1) 若 $\lambda_1(-f(x,0))\geqslant 0$, 那么问题 (3.4.1) 无正解;

(2) 若 $\lambda_1(-f(x,0))<0$, 那么问题 (3.4.1) 的正解 u 存在且唯一, 同时还满足 $u(x)\leqslant C$.

证明　(1) 如果问题 (3.4.1) 有正解 u, 则 $0=\lambda_1(-f(x,u))>\lambda_1(-f(x,0))$, 故结论 (1) 成立.

(2) 假设 $\lambda_1(-f(x,0))<0$. 先证存在性.

记 $\lambda_1(-f(x,0))$ 对应的正特征函数为 ϕ. 取 $\varepsilon>0$ 适当小, $\underline{u}=\varepsilon\phi$, 则有

$$\begin{aligned} -\Delta\underline{u} &= \varepsilon\phi f(x,0)+\varepsilon\lambda_1(-f(x,0))\phi \\ &= \varepsilon\phi f(x,\varepsilon\phi)+\varepsilon\phi\big[\lambda_1(-f(x,0))+f(x,0)-f(x,\varepsilon\phi)\big]. \end{aligned}$$

因为 $\lambda_1(-f(x,0))<0$, 并且当 $\varepsilon\longrightarrow 0^+$ 时, $f(x,0)-f(x,\varepsilon\phi)\longrightarrow 0$, 所以当 $\varepsilon>0$ 适当小时, $\underline{u}$ 是一个下解. 直接验证知, $\bar{u}=C$ 是一个上解. 故问题 (3.4.1) 在 $\langle\varepsilon\phi, C\rangle$ 中存在一个最大解 $\hat{u}$ 和一个最小解 $\tilde{u}$.

再证唯一性. 若 u 是问题 (3.4.1) 的一个正解, 利用极值原理容易推出 $u(x)\leqslant C$. 因为 $u=Tu$, 所以 $u\leqslant\bar{u}_m$ 对于所有的 m 成立, 故 $u\leqslant\hat{u}$. 这里的 T 和 $\bar{u}_m$ 由定理 3.3.4 的证明过程给出. 注意到

$$\int_\Omega u\hat{u}f(x,\hat{u})\mathrm{d}x=\int_\Omega\nabla\hat{u}\cdot\nabla u\mathrm{d}x=\int_\Omega\hat{u}uf(x,u)\mathrm{d}x,$$

如果 $u\not\equiv\hat{u}$, 则有

$$0=\int_\Omega\hat{u}u\big[f(x,\hat{u})-f(x,u)\big]\mathrm{d}x<0.$$

该矛盾说明 $u\equiv\hat{u}$. 证毕.

例 2　考察问题 (3.4.1) 的一个特例:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(u-u^2), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

由定理 3.4.1 知, 问题 (3.4.2) 有正解当且仅当 $a>\lambda_1$. 此外, 当 $a>\lambda_1$ 时, 正解还是唯一的.

引理 3.4.1 假设 $a>\lambda_1$, 并记 u_a 是问题 (3.4.2) 的唯一正解. 又设 $0<\sigma<1$, 则 $\lambda_1(\sigma a u_a)<a$.

证明 令 $u=(1-\sigma)u_a$, 我们有

$$\begin{cases} -\Delta u+a\sigma u u_a=au(1-u)<au, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

由于 $u>0$, 根据推论 2.3.1, $\lambda_1(\sigma a u_a)<a$. 证毕.

定理 3.4.2 在引理 3.4.1 的条件下, $(1-\sigma)u_a$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=au\big(1-\sigma u_a-u\big), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3.4.3}$$

的唯一正解.

证明 直接验证知, $u=(1-\sigma)u_a$ 是问题 (3.4.3) 的正解. 记 $f(x,u)=a(1-\sigma u_a-u)$, 那么 f 满足定理 3.4.1 的条件. 由定理 3.4.1, $u=(1-\sigma)u_a$ 是问题 (3.4.3) 的唯一正解. 证毕.

例 3 讨论边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=au-u^k, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4.4}$$

其中 $k\geqslant 2$ 是整数.

定理 3.4.3 (1) 假设 $k\geqslant 3$ 是奇数. 则当 $a>\lambda_1$ 时, 问题 (3.4.4) 的正解存在且唯一, 负解存在也唯一; 而当 $a\leqslant\lambda_1$ 时, 问题 (3.4.4) 只有零解;

(2) 假设 $k\geqslant 2$ 是偶数. 则当 $a>\lambda_1$ 时, 问题 (3.4.4) 存在唯一正解, 不存在负解; 而当 $a\leqslant\lambda_1$ 时, 问题 (3.4.4) 无正解;

(3) 设 $a>\lambda_1$, 并记 u_a^+ 是问题 (3.4.4) 的唯一正解. 我们有

(3-a) 当 $a>b>\lambda_1$ 时, $u_a^+(x)>u_b^+(x)$ 在 Ω 内成立;

(3-b) $\lim\limits_{a\searrow\lambda_1}u_a^+=0$;

(3-c) 对于 $x\in\Omega$, $\lim\limits_{a\to\infty}u_a^+(x)=\infty$.

证明 结论 (1) 和 (2) 的证明留作习题. 下面证明结论 (3).

先证结论 (3-a). 假设 $a>b>\lambda_1$, 那么 u_b^+ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u_b^+=bu_b^+-(u_b^+)^k<au_b^+-(u_b^+)^k, & x\in\Omega, \\ u_b^+=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

这说明 u_b^+ 是问题 (3.4.4) 的一个下解. 因为充分大的常数 C 是问题 (3.4.4) 的一个上解, 所以问题 (3.4.4) 的解 $u_a^+ \geqslant u_b^+$, 于是 $w = u_a^+ - u_b^+$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta w + c(x)w = au_a^+ - bu_b^+ > bw, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $c(x) = \dfrac{(u_a^+)^k - (u_b^+)^k}{u_a^+ - u_b^+} \geqslant 0$. 由强极值原理 (定理 B.1.3) 知, 在 Ω 内 $w > 0$, 即 $u_a^+ > u_b^+$. 结论 (3-a) 成立.

再证结论 (3-b). 由结论 (3-a) 知, u_a^+ 关于 $a > \lambda_1$ 单调递增. 同于定理 3.3.4 的证明过程中序列 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的收敛性证明易知, $\lim\limits_{a \searrow \lambda_1} u_a^+ = u$ 存在且是问题 (3.4.4) 对应于 $a = \lambda_1$ 的非负解, 故 $u = 0$. 结论 (3-b) 成立.

最后证明结论 (3-c). 把 $\varphi_1(x)$ 单位化: $\max\limits_{\bar{\Omega}} \varphi_1(x) = 1$. 容易验证, 当 $a > \lambda_1$ 时, 函数 $(a - \lambda_1)^{1/(k-1)}\varphi_1(x)$ 是问题 (3.4.4) 的一个下解, 而充分大的正常数 C 是它的上解. 所以问题 (3.4.4) 的唯一正解 u_a^+ 满足 $u_a^+(x) \geqslant (a - \lambda_1)^{1/(k-1)}\varphi_1(x)$. 由此即得结论 (3-c). 证毕.

需要强调的是, 虽然定理 3.4.3 给出了问题 (3.4.4) 的正解和负解的清晰分支结果, 但是问题 (3.4.4) 的变号解还不十分清楚.

利用方程式的上下解方法和 L^p 理论, 还可以证明

定理 3.4.4 *假定 $q, f \in C(\bar{\Omega})$ 且在 $\bar{\Omega}$ 上 $f > 0$, k 是一个常数. 则对于任意的 $p > n$, 问题*

$$\begin{cases} -\Delta w + q(x)w = kw - f(x)w^2, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有正解 $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ 的充分必要条件是 $k > \lambda_1(q)$. 此外, 当正解存在时一定唯一.

例 4 最后, 我们考虑下面的齐次 Neumann 边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4.5}$$

其中 f 关于 u 属于 C^1, 关于 x 属于 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$.

定理 3.4.5 *假设 $f(x, u)$ 关于 $x \in \bar{\Omega}$ 连续, 关于 $u \geqslant 0$ 二次连续可微, $f(x, 0) = 0$, 并且 $f_u(x, 0) > 0$ 以及 $f_{uu}(x, u) < 0$ 对于任意的 $x \in \bar{\Omega}$ 都成立. 如果存在正常数 M, 使得 $f(x, M) < 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立, 那么问题 (3.4.5) 的正解 u 存在且唯一.*

证明 由于 $f(x,0)=0$ 且 $f_u(x,0)>0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立, 故存在 $0<\varepsilon\ll 1$, 使得 $f(x,\varepsilon)>0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 因此 $\bar{u}=M$ 和 $\underline{u}=\varepsilon$ 是问题 (3.4.5) 的有序上下解, 故问题 (3.4.5) 在 $\langle\varepsilon,M\rangle$ 中存在最大正解, 记为 $\hat{u}$.

假设 u 是问题 (3.4.5) 的一个正解. 利用极值原理易知 $u(x)\leqslant M$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立, 于是 $u\leqslant\hat{u}$. 同于定理 3.4.1 的证明, 我们有

$$\begin{aligned}0=&\int_\Omega\big[uf(x,\hat{u})-\hat{u}f(x,u)\big]\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega\big\{(u-\hat{u})f(x,u)+u\big[f(x,\hat{u})-f(x,u)\big]\big\}\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega\big[(u-\hat{u})uf_u(x,\xi(x))+u(\hat{u}-u)f_u(x,\eta(x))\big]\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega u(\hat{u}-u)f_{uu}(x,\tau(x))(\eta(x)-\xi(x))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $0<\xi(x)<u(x)$, $u(x)\leqslant\eta(x)\leqslant\hat{u}(x)$, $\xi(x)<\tau(x)<\eta(x)$. 因为 $f_{uu}<0$, $u(x)>0$, $\eta(x)>\xi(x)$, 故由上式可得 $u\equiv\hat{u}$. 证毕.

3.5 应用 II —— 非退化的 Logistic 方程

本节进一步讨论非退化的 Logistic 方程的边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=au-u^2, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3.5.1}$$

正解的性质. 为了与后面的记号一致, 当 $a>\lambda_1$ 时, 记问题 (3.5.1) 的唯一正解为 $\theta_a(x)$.

定理 3.5.1 设 $a>\lambda_1$. 我们有

(1) $\theta_a(x)/a$ 关于 a 严格单增;

(2) $\dfrac{a-\lambda_1}{\|\varphi_1\|_\infty}\varphi_1(x)\leqslant\theta_a(x)<a$, 其中 $\varphi_1(x)$ 是对应于 λ_1 的正特征函数, $\|\varphi_1\|_2=1$;

(3) 记 $m(a)=\|\theta_a\|_2$, 那么

$$\lim_{a\searrow\lambda_1}\frac{a-\lambda_1}{m(a)}=\int_\Omega\varphi_1^3\mathrm{d}x,\tag{3.5.2}$$

并且当 $a\searrow\lambda_1$ 时, 在 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 中 $\theta_a/m(a)\longrightarrow\varphi_1$;

(4) 对于 Ω 的任何紧子集 K, 存在正常数 $C(K,\Omega)$, 使得

$$\int_K(a-\theta_a)\mathrm{d}x\leqslant C(K,\Omega),\quad\forall\, a>\lambda_1;$$

(5) 当 $a\longrightarrow\infty$ 时, $\theta_a(x)/a\longrightarrow 1$ 在 Ω 的任意紧子集上一致成立.

证明 (1) 同于习题 3.1 可证, $\theta_a<a$ 在 Ω 内成立. 令 $\phi_a=\theta_a/a$, 那么 $\phi_a<1$ 并且 ϕ_a 满足问题 (3.4.2). 如果 $b>a>\lambda_1$, 那么 ϕ_b 满足

$$\begin{cases}-\Delta\phi_b=b(\phi_b-\phi_b^2)>a(\phi_b-\phi_b^2), & x\in\Omega,\\ \phi_b=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

即 ϕ_b 是问题 (3.4.2) 的一个正的严格上解. 同上, 当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时, $\varepsilon\varphi_1$ 是问题 (3.4.2) 的一个下解. 由于 $\left.\dfrac{\partial\phi_b}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}<0$, 故当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时, $\varepsilon\varphi_1<\phi_b$ 成立. 利用问题 (3.4.2) 的正解的唯一性知, 在 Ω 内 $\phi_b\geqslant\phi_a$ 成立.

令 $w=\phi_b-\phi_a$, 注意到 $\phi_a<1$, $a<b$ 并且 $\phi_b\geqslant\phi_a>0$, 我们有

$$\begin{cases}-\Delta w+b\phi_b w=(1-\phi_a)(b\phi_b-a\phi_a)>0, & x\in\Omega,\\ w=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

根据强最大值原理, $w>0$ 在 Ω 内成立, 即 $\phi_b>\phi_a$. 结论 (1) 成立.

结论 (2) 可以直接利用上下解和正解的唯一性证明.

(3) 记 $\Theta_a(x)=\theta_a(x)/m(a)$, 则 Θ_a 满足 $\|\Theta_a\|_2=1$, 且

$$\begin{cases}-\Delta\Theta_a=a\Theta_a-\theta_a\Theta_a, & x\in\Omega,\\ \Theta_a=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{3.5.3}$$

由此推知

$$\int_\Omega|\nabla\Theta_a|^2\mathrm{d}x=a\int_\Omega\Theta_a^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\theta_a\Theta_a^2\mathrm{d}x\leqslant a.$$

故存在 $\Theta\in H_0^1(\Omega)$, 当 $a\searrow\lambda_1$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\Theta_a\rightharpoonup\Theta$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $\Theta_a\longrightarrow\Theta$. 因为 $\|\Theta_a\|_2=1$, 所以 $\|\Theta\|_2=1$, 从而 $\Theta\geqslant 0,\neq 0$. 对于任何 $\phi\in H_0^1(\Omega)$, 用 ϕ 乘以问题 (3.5.3) 的方程的两边并在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega\nabla\Theta_a\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=a\int_\Omega\Theta_a\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega\theta_a\Theta_a\phi\mathrm{d}x.$$

注意到 $\lim\limits_{a\searrow\lambda_1}\theta_a(x)=0$, 在上式中令 $a\searrow\lambda_1$ 又得

$$\int_\Omega\nabla\Theta\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega\Theta\phi\mathrm{d}x.$$

这说明 $\Theta(x)$ 是问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda_1 u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的非负非平凡解. 由 Harnack 不等式知, 在 Ω 内 $\Theta(x)>0$, 于是 $\Theta(x)=\varphi_1(x)$. 利用椭圆型方程的正则性理论可以推出, 在 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 中 $\lim\limits_{a\searrow\lambda_1}\Theta_a=\Theta=\varphi_1$.

把问题 (3.5.3) 写成

$$\begin{cases} -\Delta\Theta_a=a\Theta_a-m(a)\Theta_a^2, & x\in\Omega,\\ \Theta_a=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的形式, 两边乘以 φ_1, 再用 Θ_a 乘以 φ_1 的方程, 应用 Green 公式易得

$$(a-\lambda_1)\int_\Omega\varphi_1\Theta_a\mathrm{d}x=m(a)\int_\Omega\varphi_1\Theta_a^2\mathrm{d}x.$$

因为在 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 中 $\lim\limits_{a\searrow\lambda_1}\Theta_a=\varphi_1$, 且 $\|\varphi_1\|_2=1$, 所以在上式中令 $a\searrow\lambda_1$ 即得极限 (3.5.2).

(4) 由问题 (3.5.1) 知, $\lambda_1(\theta_a-a)=0$. 再由特征值的极小原理得

$$0=\lambda_1(\theta_a-a)=\inf_{\phi\in H_0^1(\Omega)}\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega(\theta_a-a)\phi^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega\phi^2\mathrm{d}x}.$$

取函数 $\phi\in H_0^1(\Omega)$, 在 K 中 $\phi\geqslant1$. 那么

$$\int_K(a-\theta_a)\mathrm{d}x\leqslant\int_K(a-\theta_a)\phi^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega(a-\theta_a)\phi^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x=C(K,\Omega).$$

(5) 显然函数 $\phi_a(x):=\dfrac{\theta_a(x)}{a}$ 满足 $0<\phi_a<1$ 并且是问题

$$\begin{cases} -\Delta\phi_a=a(\phi_a-\phi_a^2), & x\in\Omega,\\ \phi_a=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}\tag{3.5.4}$$

的唯一正解. 对于 Ω 的任意紧子集 K, 记 $d=d(K,\partial\Omega)$. 因为 $\varphi_1|_{\partial\Omega}=0$ 并且 $\varphi_1\in C(\bar{\Omega})$, 所以存在正常数 $\sigma<d/2$, 使得在集合 $U_\sigma=\{x\in\Omega: d(x,\partial\Omega)<\sigma\}$ 上 $\varphi_1<1/2$. 对于任意给定的 $0<\varepsilon\ll1$, 取一个光滑函数 $w_\varepsilon(x)$, 使得在 Ω 内 $0<w_\varepsilon\leqslant1-\varepsilon$, 在 K 上 $w_\varepsilon=1-\varepsilon$, 在 U_σ 内 $w_\varepsilon=\varphi_1$. 容易验证存在正常数 A, 对于所有的 $a\geqslant A$, 上面构造的函数 w_ε 是问题 (3.5.4) 的下解. 对问题 (3.5.4) 利用上下解方法和正解的唯一性推知, 当 $a\geqslant A$ 时有 $w_\varepsilon(x)\leqslant\phi_a(x)<1$. 特别有,

$$1-\varepsilon\leqslant\phi_a(x)<1,\quad\forall\,x\in K,\ a\geqslant A.$$

由 ε 的任意性知结论成立. 定理得证.

如果 Ω 具有很好的光滑性, 在边界 $\partial\Omega$ 附近利用坐标变换把问题 (3.5.4) 转化成半空间上的边值问题, Dancer 在文献 [11] 中对于函数 $\phi_a(x)=\theta_a(x)/a$ 的渐近性质得到了更好的结果.

取 $z(t)$ 是问题

$$\begin{cases} -z''=z(1-z), & t>0, \\ z(0)=0, & z(\infty)=1 \end{cases}$$

的唯一正解, 那么 $z(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格递增并且 $z''(t)\leqslant 0$. 所以, 对于任何常数 $k>1$, 有 $kz(t)\geqslant z(kt)$, $t\in[0,\infty)$. 对于适当小的 $\delta>0$, 定义

$$w_a(x)=\begin{cases} z\big(a^{1/2}d(x)\big), & \text{如果 } d(x)<\delta, \\ 1, & \text{如果 } d(x)\geqslant\delta, \end{cases}$$

其中 $d(x)=d(x,\partial\Omega)$.

引理 3.5.1 ([11, 引理 2]) **对于任意给定的** $0<\sigma<1$, **存在** $A(\sigma)$, **当** $a\geqslant A(\sigma)$ **时有**

$$(1-\sigma)w_a(x)\leqslant\phi_a(x)\leqslant(1+\sigma)w_a(x),\quad x\in\Omega. \tag{3.5.5}$$

利用该引理, 我们可以得到关于 $\theta_a(x)$ 的更好估计.

定理 3.5.2 **对于任意给定的常数** $\varepsilon>0$ **和** $k>1$, **存在正常数** $A=A(\varepsilon,k)$, **当** $a\geqslant A$ **时有**

$$(1+\varepsilon)k^{3/2}\theta_a(x)\geqslant\theta_{ka}(x),\quad x\in\Omega. \tag{3.5.6}$$

特别地, 对于 $k_0\in(1,4^{1/3})$, **存在正常数** $A_0=A(k_0)$, **当** $a\geqslant A_0$ **时有**

$$2\theta_a(x)\geqslant\theta_{k_0a}(x),\quad x\in\Omega.$$

进而又得到

$$\lambda_1(2\theta_a)\geqslant\lambda_1(\theta_{k_0a})=k_0a. \tag{3.5.7}$$

证明 只需证明不等式 (3.5.6). 取 $\sigma>0$ 适当小, 使得 $(1+\sigma)/(1-\sigma)<1+\varepsilon$. 令 $A(\sigma)$ 由引理 3.5.1 确定, 对于 $x\in\Omega$, 当 $d(x)<\delta$ 及 $a\geqslant A(\sigma)$ 时, 利用估计式 (3.5.5) 得

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)k^{3/2}\theta_a(x)&=(1+\varepsilon)k^{3/2}a\phi_a(x)\geqslant(1+\sigma)k^{3/2}aw_a(x)\\ &=(1+\sigma)k^{3/2}az\big[a^{1/2}d(x)\big]\geqslant(1+\sigma)kaz\big[(ka)^{1/2}d(x)\big]\\ &=(1+\sigma)kaw_{ka}(x)\geqslant ka\phi_{ka}(x)=\theta_{ka}(x).\end{aligned}$$

对于 $x \in \Omega$, 当 $d(x) \geqslant \delta$ 时, 由于 $\lim\limits_{a\to\infty} \phi_a(x) = 1$ 关于 $d(x) \geqslant \delta$ 一致成立, 所以存在正常数 A', 使得 $a \geqslant A'$ 时有

$$(1+\varepsilon)k^{3/2}\theta_a(x) \geqslant \theta_{ka}(x), \quad x \in \Omega, \ d(x) \geqslant \delta.$$

定理得证.

3.6 应用 III —— 退化的 Logistic 方程

3.5 节讨论了非退化的 Logistic 方程的齐次 Dirichlet 边值问题的正解的性质. 本节讨论退化的 Logistic 方程的齐次 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^p, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.6.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, 边界 $\partial\Omega \in C^2$, 函数 $b(x)$ 非负且连续, $p > 1$ 是常数, $a \in \mathbb{R}$ 视为参数. 本节的内容参考了文献 [2].

为了书写方便, 记问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值为 $\lambda_1^\Omega(q)$, 而当 $q(x) = 0$ 时, 简记为 λ_1^Ω.

假设在 $\bar{\Omega}$ 上 $b(x)$ 连续、非负且不恒为零, 集合 $\Omega_0^* := \{x \in \bar{\Omega} : b(x) = 0\}$ 的内部 Ω_0 不空并且只有有限个连通分支. 方便起见, 我们假设 Ω_0 只有一个连通分支, 即它是一个区域.

3.6.1 正解的存在性和渐近性

定理 3.6.1 *存在常数 $a^* \in (\lambda_1^\Omega, \lambda_1^{\Omega_0}]$, 当 $a \in (\lambda_1^\Omega, a^*)$ 时问题 (3.6.1) 有唯一正解, 记为 u_a, 而当 $a \notin (\lambda_1^\Omega, a^*)$ 时问题 (3.6.1) 没有正解. 此外,*

(1) 当 a 单调递减趋于 λ_1^Ω 时, $u_a \longrightarrow 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立;

(2) 当 a 单调递增趋于 a^* 时, $\|u_a\|_\infty \longrightarrow \infty$.

这里需要指出的是, 由于 Ω_0 的边界未必光滑, 所以 $\lambda_1^{\Omega_0}$ 应该按照 (2.3.3) 的方式来理解.

定理 3.6.1 的证明 记 $\psi > 0$ 是与 λ_1^Ω 对应的正特征函数并认为 $\|\psi\|_\infty = 1$, 定义

$$a_k = \lambda_1^\Omega\big(kb(x)\psi^{p-1}(x)\big), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

根据定理 2.4.7,

$$\lambda_1^{\Omega} < a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} < \cdots.$$

由于 $b(x) \neq 0$, 故 $\Omega_0 \neq \Omega$. 利用定理 2.4.10 得

$$a_k < \lambda_1^{\Omega_0}(kb(x)\psi^{p-1}(x)) = \lambda_1^{\Omega_0}(0) = \lambda_1^{\Omega_0},$$

由此得极限

$$a^* := \lim_{k\to\infty} a_k \leqslant \lambda_1^{\Omega_0}.$$

先证明对于每一个 $a \in (\lambda_1^{\Omega}, a^*)$, 问题 (3.6.1) 有正解. 事实上, 因为 a_k 单调上升趋向于 a^*, 故存在 k 使得 $a < a_k$. 设 $\phi_k > 0$ 是与 a_k 对应的单位化的特征函数:

$$\begin{cases} -\Delta\phi_k + kb(x)\psi^{p-1}(x)\phi_k = a_k\phi_k, & x \in \Omega, \\ \|\phi_k\|_\infty = 1, & \phi_k|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

应用引理 2.2.1, 存在正常数 $c_1 < c_2$, 使得 $c_1\psi < \phi_k \leqslant c_2\psi$ 在 Ω 内成立. 故存在适当大的正常数 $M = M(k)$, 使得

$$\begin{aligned} &\Delta(M\phi_k) + a(M\phi_k) - b(x)(M\phi_k)^p \\ =& -a_k(M\phi_k) + kb(x)\psi^{p-1}(x)(M\phi_k) + a(M\phi_k) - b(x)(M\phi_k)^p \\ =& (a - a_k)(M\phi_k) + Mb(x)\phi_k\left[k\psi^{p-1} - (M\phi_k)^{p-1}\right] \\ \leqslant& 0, \quad \forall\, x \in \Omega. \end{aligned}$$

这说明 $M\phi_k$ 是问题 (3.6.1) 的一个上解. 容易验证, 对于适当小的 $\varepsilon > 0$, 函数 $\varepsilon\psi$ 是问题 (3.6.1) 的一个下解, 并且 $\varepsilon\psi \leqslant M\phi_k$ (引理 2.2.1). 因此问题 (3.6.1) 至少存在一个正解.

现在证明正解的唯一性. 如果 u 也是问题 (3.6.1) 的一个正解, 根据椭圆型方程的正则性理论 (L^p 理论与嵌入定理) 和 Hopf 引理, $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0$. 应用引理 2.2.1 知, 存在正常数 ε' 和 M', 使得 $\varepsilon'\psi \leqslant u \leqslant M'\phi_k$. 把 ε 取得再小一些, $M = M(k)$ 取得再大一些, 可使 $\varepsilon\psi \leqslant u \leqslant M\phi_k$, 并且 $M\phi_k$ 和 $\varepsilon\psi$ 分别是问题 (3.6.1) 的上解和下解. 记 $\hat{u}$ 是问题 (3.6.1) 位于区间 $\langle\varepsilon\psi, M\phi_k\rangle$ 内的最大解, 那么 $u \leqslant \hat{u}$. 如果 $u \neq \hat{u}$, 利用强最大值原理知, $u(x) < \hat{u}(x)$, $x \in \Omega$. 同于定理 3.4.1 的证明, 有

$$\int_\Omega b(x)u\hat{u}\big(u^{p-1} - \hat{u}^{p-1}\big)\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $b(x) \geqslant 0, \neq 0$, $u < \hat{u}$, 所以上式左端小于零, 矛盾. 因此 $u \equiv \hat{u}$. 由此得问题 (3.6.1) 的正解的唯一性.

再证明当 $a \notin (\lambda_1^\Omega, a^*)$ 时, 问题 (3.6.1) 没有正解. 用反证法. 假设存在 $a_0 \notin (\lambda_1^\Omega, a^*)$, 使得问题 (3.6.1) 当 $a = a_0$ 时有正解 ψ_0, 那么 ψ_0 满足

$$\begin{cases} -\Delta\psi_0 = a_0\psi_0 - b(x)\psi_0^p, & x \in \Omega, \\ \psi_0 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

因此

$$a_0 = \lambda_1^\Omega(b\psi_0^{p-1}) > \lambda_1^\Omega.$$

由于 $a_0 \notin (\lambda_1^\Omega, a^*)$, 故 $a_0 \geqslant a^*$. 另一方面, 应用引理 2.2.1 知, 存在适当大的 k, 使得 $\psi_0^{p-1}(x) < k\psi^{p-1}(x)$. 故有

$$a_0 = \lambda_1^\Omega(b\psi_0^{p-1}) < \lambda_1^\Omega(k\psi^{p-1}b) = a_k < a^*.$$

此与 $a_0 \geqslant a^*$ 矛盾.

下面证明结论 (1) 和 (2). 结论 (1) 的证明同于定理 3.4.3. 只证结论 (2), 即证明当 $a \nearrow a^*$ 时, $\|u_a\|_\infty \longrightarrow \infty$. 如若不然, 则存在序列 $\{a_i\}_{i=1}^\infty$: $a_i \nearrow a^*$, 使得 $\|u_{a_i}\|_\infty \leqslant C$ 对所有 i 成立. 利用 L^p 理论和嵌入定理, 存在 $\hat{u} \in C^1(\bar{\Omega})$ 以及 $\{u_{a_i}\}_{i=1}^\infty$ 的子列, 仍记为 $\{u_{a_i}\}_{i=1}^\infty$, 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中 $u_{a_i} \longrightarrow \hat{u}$, 并且 $\hat{u}$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta\hat{u} = a^*\hat{u} - b(x)\hat{u}^p, & x \in \Omega, \\ \hat{u} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6.2}$$

同于定理 3.4.3 的结论 (3-a), 问题 (3.6.1) 的正解关于 $a \in (\lambda_1^\Omega, a^*)$ 单增. 由于 a_i 关于 i 单增, 故 u_{a_i} 关于 i 单增, 因此 $u_{a_i}(x) \geqslant u_{a_1}(x)$. 进而推出 $\hat{u}(x) \geqslant u_{a_1}(x) > 0$, $x \in \Omega$. 这说明 $\hat{u}$ 是问题 (3.6.2) 的一个正解. 此与 $a \geqslant a^*$ 时问题 (3.6.1) 无正解的事实相矛盾. 证毕.

如果 Ω_0 有下面更好的性质, 我们还可以得到更好的结果.

$$\bar{\Omega}_0 \subset \Omega, \quad \partial\Omega_0 \in C^2. \tag{3.6.3}$$

定理 3.6.2 假设条件 (3.6.3) 成立, 那么 $a^* = \lambda_1^{\Omega_0}$, 并且当 $a \nearrow a^*$ 时, $u_a \longrightarrow \infty$ 在 $\bar{\Omega}_0$ 上一致成立.

证明 首先, 由上下解方法易知, u_a 关于 a 单增. 为证明 $u_a \longrightarrow \infty$ 在 $\bar{\Omega}_0$ 上一致成立, 只要证明对于一个子列成立即可. 设 $\lambda_1^\Omega < a_k < a^*$ 并且 $a_k \nearrow a^*$. 为了简化记号, 记 $u_k = u_{a_k}$.

第一步 证明 $a^* = \lambda_1^{\Omega_0}$ 并且 $u_k(x) \longrightarrow \infty$ 在 Ω_0 的任一紧子集上一致成立.

记 $\hat{u}_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|_\infty}$, 则有

$$-\Delta\hat{u}_k = a_k\hat{u}_k - b(x)\|u_k\|_\infty^{p-1}\hat{u}_k^p \leqslant a^*\hat{u}_k, \quad x \in \Omega; \quad \hat{u}_k|_{\partial\Omega} = 0,$$

由此推出

$$\int_\Omega |\nabla \hat{u}_k|^2 \mathrm{d}x \leqslant a^* \int_\Omega \hat{u}_k^2 \mathrm{d}x \leqslant a^*|\Omega|.$$

这说明, $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^\infty$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的. 又因为 $\|\hat{u}_k\|_\infty = 1$, 所以存在 $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^\infty$ 的一个子列 $\{\hat{u}_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ 以及函数 $\hat{u} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\hat{u}_{k_i}$ 弱收敛于 $\hat{u}$, 并且对于任意的 $1 < q < \infty$, 在 $L^q(\Omega)$ 中 $\hat{u}_{k_i}$ 强收敛于 $\hat{u}$. 见习题 3.5. 显然 $\hat{u} \geqslant 0$. 我们断言: $\hat{u} \not\equiv 0$. 如若不然, 利用椭圆型方程的 L^p 理论知, 在 $L^\infty(\Omega)$ 中 $(-\Delta)^{-1}\hat{u}_{k_i} \longrightarrow 0$. 又因为 $0 \leqslant \hat{u}_{k_i} \leqslant a^*(-\Delta)^{-1}\hat{u}_{k_i}$, 所以在 $L^\infty(\Omega)$ 中 $\hat{u}_{k_i} \longrightarrow 0$. 此与 $\|\hat{u}_{k_i}\|_\infty = 1$ 相矛盾.

对于任意给定的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 用 $\dfrac{\phi}{\|u_{k_i}\|_\infty}$ 乘以 u_{k_i} 的方程并在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega \nabla \hat{u}_{k_i} \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x = a_{k_i} \int_\Omega \hat{u}_{k_i} \phi \mathrm{d}x - \|u_{k_i}\|_\infty^{p-1} \int_\Omega b(x) \hat{u}_{k_i}^p \phi \mathrm{d}x. \tag{3.6.4}$$

根据定理 3.6.1, $\|u_{k_i}\|_\infty \longrightarrow \infty$. 用 $\|u_{k_i}\|_\infty^{p-1}$ 除以 (3.6.4) 的两边并令 $i \longrightarrow \infty$ 得

$$\int_\Omega b(x) \hat{u}^p \phi \mathrm{d}x = 0.$$

由于 $b(x)$ 是非负的, 在 $\Omega \setminus \bar{\Omega}_0$ 上 $b(x) > 0$, 并且 ϕ 是任意的, 故在 $\Omega \setminus \bar{\Omega}_0$ 上 $\hat{u} \equiv 0$. 这说明 $\hat{u}|_{\Omega_0} \in H_0^1(\Omega_0)$, 并且 $\hat{u}$ 是非负的, 在 Ω_0 上不恒为零.

另一方面, 如果取 $\phi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, 那么由等式 (3.6.4) 推得

$$\int_{\Omega_0} \nabla \hat{u}_{k_i} \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x = a_{k_i} \int_{\Omega_0} \hat{u}_{k_i} \phi \mathrm{d}x.$$

令 $i \longrightarrow \infty$ 得

$$\int_{\Omega_0} \nabla \hat{u} \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x = a^* \int_{\Omega_0} \hat{u} \phi \mathrm{d}x.$$

这说明, 函数 $\hat{u}|_{\Omega_0}$ 是边值问题

$$-\Delta u = a^* u, \quad x \in \Omega_0; \quad u|_{\partial\Omega_0} = 0$$

的非平凡非负弱解. 利用弱解的 Harnack 不等式 (定理 B.1.10) 知, 在 Ω_0 内 $\hat{u} > 0$. 再利用正则性理论又知, $\hat{u}|_{\Omega_0} \in C^2(\Omega_0)$, 故 $a^* = \lambda_1^{\Omega_0}$, 并且 $\hat{u}|_{\Omega_0}$ 是对应于 $\lambda_1^{\Omega_0}$ 的正特征函数.

对于小常数 $\delta > 0$, 令 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega_0 : d(x, \partial\Omega_0) > \delta\}$. 由于 $-\Delta \hat{u}_{k_i} = a_{k_i} \hat{u}_{k_i}$, 后者在 $L^\infty(\Omega_0)$ 中有一个与 i 无关的界, 根据 L^p 内估计知, 对于任意 $q > 1$, 序列 $\{\hat{u}_{k_i}|_{\Omega_\delta}\}_{i=1}^\infty$ 在 $W^{2,q}(\Omega_\delta)$ 中有界. 故存在 $\{\hat{u}_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ 的子列 $\{\hat{u}_{k_i'}\}_{i=1}^\infty$, 在 $C^1(\bar{\Omega}_\delta)$ 中 $\hat{u}_{k_i'}|_{\Omega_\delta}$ 收敛于 $\hat{u}|_{\Omega_\delta}$. 因为在 $\bar{\Omega}_\delta$ 上 $\hat{u} > 0$ 而且 $\|u_{k_i'}\|_\infty \longrightarrow \infty$, 所以在 $\bar{\Omega}_\delta$ 上

$u_{k'_i}(x) \longrightarrow \infty$ 一致成立. 注意到整个序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 关于 k 是单增的, 因此 $u_k(x) \longrightarrow \infty$ 在 $\bar{\Omega}_\delta$ 上一致成立. 再由 $\delta > 0$ 的任意性知, 对于 Ω_0 的任意紧子集 K, 在 K 中 $u_k \longrightarrow \infty$ 一致成立. 第一步的结论得证.

因为 $\partial\Omega_0$ 属于 C^2, 故满足内球条件: 存在 $r > 0$, 对任意 $x \in \partial\Omega_0$, 都存在一个以 r 为半径的闭球 B_x 满足 $B_x \subset \bar{\Omega}_0$, $B_x \cap \partial\Omega_0 = \{x\}$.

第二步 因为在 Ω_0 内 u_k 满足 $-\Delta u_k = a_k u_k > 0$, 所以存在 $x_k \in \partial\Omega_0$ 使得

$$u_k(x_k) = \min_{\partial\Omega_0} u_k(x).$$

欲证明: 若序列 $\{u_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 有界, 则存在常数 $\sigma > 0$ 和序列 $c_k \longrightarrow \infty$, 使得

$$u_k(x) \geqslant u_k(x_k) + c_k\psi(x), \quad \forall\, x: r/2 \leqslant |x - y_k| \leqslant r, \tag{3.6.5}$$

这里的 $\psi(x) = \mathrm{e}^{-\sigma|x-y_k|^2} - \mathrm{e}^{-\sigma r^2}$, $y_k \in \Omega_0$ 是球 B_{x_k} 的球心.

直接计算知

$$\Delta\psi + a_k\psi = \left(4\sigma^2|x-y_k|^2 - 2n\sigma + a_k\right)\mathrm{e}^{-\sigma|x-y_k|^2} - a_k\mathrm{e}^{-\sigma r^2}.$$

因此可取 $\sigma > 0$ 充分大, 当 $r/2 \leqslant |x - y_k| \leqslant r$ 时有 $\Delta\psi(x) + a_k\psi(x) \geqslant 0$, 即

$$-\Delta\psi(x) \leqslant a_k\psi(x), \quad \forall\, x \in B_{x_k} \setminus B_{r/2}(y_k),$$

其中 $B_{r/2}(y_k) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y_k| < r/2\}$.

取紧子集 $K \subset\subset \Omega_0$, 使得 $K \supset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{r/2}(y_k)$. 由于假设 $\{u_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 是有界的, 根据第一步的结论, 存在子序列 $c_k \longrightarrow \infty$ 使得

$$u_k(x) \geqslant u_k(x_k) + c_k(\mathrm{e}^{-\sigma r^2/4} - \mathrm{e}^{-\sigma r^2}), \quad \forall\, x \in B_{r/2}(y_k) \subset K.$$

另一方面, 由于 $a_k < a^*$, 利用最大值原理知, $u_k(x) \geqslant u_k(x_k)$, $\forall\, x \in \Omega_0$. 特别地, 在 ∂B_{x_k} 上 $u_k(x) \geqslant u_k(x_k)$. 这说明 u_k 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u = a_k u, \quad x \in B_{x_k} \setminus \bar{B}_{r/2}(y_k), \\ u|_{\partial B_{x_k}} = u_k(x_k), \\ u|_{\partial B_{r/2}(y_k)} = u_k(x_k) + c_k\left(\mathrm{e}^{-\sigma r^2/4} - \mathrm{e}^{-\sigma r^2}\right) \end{cases} \tag{3.6.6}$$

的一个上解. 明显地, $u_k(x_k) + c_k\psi(x)$ 是问题 (3.6.6) 的一个下解. 因为 $a_k < a^* < \lambda_1^{B_{x_k} \setminus \bar{B}_{r/2}(y_k)}$, 利用定理 2.3.1 知,

$$u_k(x) \geqslant u_k(x_k) + c_k\psi(x), \quad \forall\, x \in \left\{r/2 \leqslant |x - y_k| \leqslant r\right\}.$$

第三步　证明 $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x)=\infty$ 在 $\bar{\Omega}_0$ 上一致成立.

根据最大值原理, 只需证明

$$u_k(x_k)=\min_{\partial\Omega_0} u_k(x)\longrightarrow\infty.$$

如果结论不对, 则存在子列仍记为 $\{u_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $u_k(x_k)\leqslant C$ 对所有 k 成立. 显然 u_k 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u=a_k u-b^*u^p, & x\in\Omega\setminus\bar{\Omega}_0,\\ u|_{\partial\Omega_0}=u_k(x_k)>0, & u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}\tag{3.6.7}$$

的一个上解, 这里 $b^*=\|b\|_\infty>0$. 由于 0 是该问题的一个下解, 故问题 (3.6.7) 存在正解 $v_k\leqslant u_k$. 在问题 (3.6.7) 中, 用 $u_k(x_k)$ 的上界 C 代替 $u_k(x_k)$, 用 a^* 代替 a_k, 类似地可以得到问题 (3.6.7) 的一个正解 V, 并且 V 还满足 $v_k\leqslant V$, $x\in\Omega\setminus\Omega_0$. 特别地, $\|v_k\|_{L^\infty(\Omega\setminus\Omega_0)}$ 关于 k 有界. 再利用 L^p 估计和嵌入定理, $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $C^1(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0)$ 中有界, 从而 $\{|\nabla v_k(x_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ 有界. 又因为

$$u_k(x)\geqslant v_k(x),\quad \forall\, x\in\Omega\setminus\Omega_0,\quad 并且\ u_k(x_k)=v_k(x_k),$$

故存在常数 $C_0>0$, 使得

$$\frac{\partial u_k(x_k)}{\partial\nu_k}\leqslant\frac{\partial v_k(x_k)}{\partial\nu_k}\leqslant C_0,$$

其中 $\nu_k=\dfrac{y_k-x_k}{|y_k-x_k|}$, y_k 同于第二步.

另一方面, 由第二步的结论知, 当 $k\longrightarrow\infty$ 时,

$$\frac{\partial u_k(x_k)}{\partial\nu_k}\geqslant c_k\frac{\partial\psi(x_k)}{\partial\nu_k}=c_k[2\sigma r\mathrm{e}^{-\sigma r^2}]\longrightarrow\infty.$$

这是一个矛盾. 定理得证.

3.6.2　摄动与解的模式 (pattern)

假设条件 (3.6.3) 成立. 由定理 3.6.1 和定理 3.6.2 知, 问题 (3.6.1) 有正解当且仅当 $\lambda_1^{\Omega}<a<\lambda_1^{\Omega_0}$, 并且当正解存在时, 一定唯一. 取 $\varepsilon>0$ (小常数), 考虑摄动问题

$$-\Delta u=au-[b(x)+\varepsilon]u^p,\quad x\in\Omega;\quad u|_{\partial\Omega}=0.\tag{3.6.8}$$

根据定理 3.4.1, 问题 (3.6.8) 有正解当且仅当 $a>\lambda_1^{\Omega}$, 并且当正解存在时一定是唯一的. 这与 $\varepsilon=0$ 的情况完全不同. 下面讨论当 ε 单调递减趋于 0 时, 问题 (3.6.8) 的正解的渐近性质.

定理 3.6.3 假设 $a > \lambda_1^{\Omega}$ 并且条件 (3.6.3) 成立, u_a 和 u_a^ε 分别是问题 (3.6.8) 对应于 $\varepsilon = 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 的唯一正解. 那么下面的结论成立:

(1) 如果 $\lambda_1^{\Omega} < a < \lambda_1^{\Omega_0}$, 则当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时, $u_a^\varepsilon \longrightarrow u_a$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立;

(2) 如果 $a \geqslant \lambda_1^{\Omega_0}$ (此时 u_a 不存在), 则当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时, $u_a^\varepsilon \longrightarrow \infty$ 在 $\bar{\Omega}_0$ 上一致成立.

证明 首先, 利用上下解方法和解的唯一性易证, $u_a(x)$ 关于 a 是单增的, $u_a^\varepsilon(x)$ 关于 a 是单增的, 关于 ε 是单减的, 并且当二者都存在时, 还有

$$u_a^\varepsilon(x) < u_a(x). \tag{3.6.9}$$

因此集合 $\{u_a^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界, 并且对于任意的 $x \in \Omega$, 极限 $u_a^0(x) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_a^\varepsilon(x)$ 存在. 假设 $\lambda_1^{\Omega} < a < \lambda_1^{\Omega_0}$, 根据椭圆型方程的 L^p 理论和嵌入定理, 集合 $\{u_a^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中是紧的. 利用 $u_a^\varepsilon(x)$ 关于 ε 的单减性又知, 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中 $u_a^\varepsilon \longrightarrow u_a^0$, 从而 u_a^0 是 $\varepsilon = 0$ 时问题 (3.6.8) 的一个正解. 再由正解的唯一性得 $u_a^0 = u_a$. 结论 (1) 成立.

下面证明结论 (2). 假设 $a \geqslant \lambda_1^{\Omega_0}$. 令

$$m_\varepsilon = \min_{\bar{\Omega}_0} u_a^\varepsilon(x) = u_a^\varepsilon(x_\varepsilon), \quad x_\varepsilon \in \bar{\Omega}_0.$$

要证当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时, $m_\varepsilon \longrightarrow \infty$. 我们用反证法并分成几步来完成.

第一步 证明: 如果 $m_\varepsilon \leqslant C$ 对所有 $\varepsilon > 0$ 成立, 那么 $d(x_\varepsilon, \partial\Omega_0) \longrightarrow 0$.

因为 $a \geqslant \lambda_1^{\Omega_0}$, 我们断言, 当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时, $\|u_a^\varepsilon\|_\infty \longrightarrow \infty$. 如若不然, 则 u_a^ε 趋向于问题 (3.6.1) 的一个正解 (因为 u_a^ε 关于 ε 单调递减). 这与定理 3.6.1 的结论相矛盾.

取一个序列 $\varepsilon_i \longrightarrow 0$, 并定义 $\hat{u}_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$, 其中 $u_i = u_a^{\varepsilon_i}$. 容易看出 $\hat{u}_i$ 满足

$$-\Delta \hat{u}_i = a\hat{u}_i - \big(b(x) + \varepsilon_i\big)\|u_i\|_\infty^{p-1}\hat{u}_i^p, \quad x \in \Omega; \quad \hat{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.6.10}$$

故有 $-\Delta \hat{u}_i \leqslant a\hat{u}_i$, 于是

$$\int_\Omega |\nabla \hat{u}_i|^2 \mathrm{d}x \leqslant a\int_\Omega \hat{u}_i^2 \mathrm{d}x \leqslant a|\Omega|. \tag{3.6.11}$$

这说明集合$\{\hat{u}_i\}_{i=1}^\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界, 故在 $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 中有界. 由习题 3.5 知, 存在 $\{\hat{u}_i\}_{i=1}^\infty$ 的一个子列仍记为它自身, 以及函数 $\hat{u} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\hat{u}_i$ 弱收敛于 $\hat{u}$, 并且对任意 $q > 1$, 在 $L^q(\Omega)$ 中 $\hat{u}_i$ 强收敛于 $\hat{u}$. 显然 $\hat{u} \geqslant 0, \neq 0$.

先用 $\hat{u}_i$ 乘以 (3.6.10) 的方程并在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega |\nabla \hat{u}_i|^2 \mathrm{d}x - a\int_\Omega \hat{u}_i^2 \mathrm{d}x = -\int_\Omega \big(b(x) + \varepsilon_i\big)\|u_i\|_\infty^{p-1}\hat{u}_i^{p+1} \mathrm{d}x.$$

上式两边除以 $\|u_i\|_\infty^{p-1}$, 注意到 $\|u_i\|_\infty \longrightarrow \infty$, $p>1$, $b(x)|_{\bar{\Omega}_0}=0$, 以及估计式 (3.6.11), 再令 $i\longrightarrow\infty$ 得

$$\int_{\Omega_+} b(x)\hat{u}^{p+1}\mathrm{d}x = \int_{\Omega} b(x)\hat{u}^{p+1}\mathrm{d}x = 0,$$

这里 $\Omega_+ := \Omega\setminus\bar{\Omega}_0$. 因为在 Ω_+ 上 $b(x)>0$, 由上式推知在 Ω_+ 上 $\hat{u}=0$. 由于 $\partial\Omega_0$ 光滑, 故 $\hat{u}|_{\Omega_0}\in H_0^1(\Omega_0)$.

令 $\|u_i\|_\infty = u_i(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i\in\Omega$, 根据 Bony 最大值原理 (定理 B.1.7), 存在 $\tilde{x}_k\longrightarrow\bar{x}_i$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\Delta u_i(\tilde{x}_k)\leqslant 0$. 再利用 u_i 的方程得

$$0\leqslant au_i(\bar{x}_i)-\big(b(\bar{x}_i)+\varepsilon_i\big)u_i^p(\bar{x}_i),$$

由此推出 $\varepsilon_i\|u_i\|_\infty^{p-1}\leqslant a$, 不妨假设 $\varepsilon_i\|u_i\|_\infty^{p-1}\longrightarrow\xi\geqslant 0$.

对任意 $\psi\in C_0^\infty(\Omega_0)$, 用 ψ 乘以 $\hat{u}_i$ 的方程再积分, 并令 $i\longrightarrow\infty$ 得

$$\int_{\Omega_0}\nabla\hat{u}\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0}(a\hat{u}-\xi\hat{u}^p)\psi\mathrm{d}x.$$

这说明 $\hat{u}|_{\Omega_0}$ 是问题

$$-\Delta u=(a-\xi u^{p-1})u,\quad x\in\Omega_0;\quad u|_{\partial\Omega_0}=0$$

的一个非负弱解. 应用弱解的 Harnack 不等式 (定理 B.1.10) 知, 在 Ω_0 内 $\hat{u}>0$.

我们已经知道, $\varepsilon_i\|u_i\|_\infty^{p-1}\leqslant a$. 从 $\hat{u}_i$ 的方程可以看出, $-\Delta\hat{u}_i$ 在 $\bar{\Omega}_0$ 上一致有界. 利用椭圆型方程的 L^p 内估计知, 对于任意 $q>1$ 和 Ω_0 的任意紧子区域 Ω', $\hat{u}_i$ 在 $W^{2,q}(\Omega')$ 中有界. 再利用嵌入定理, 通过选取子序列又知, 在 $C^1(\bar{\Omega}')$ 中 $\hat{u}_i\longrightarrow\hat{u}$. 因为在 Ω_0 内 $\hat{u}>0$, $\|u_i\|_\infty\longrightarrow\infty$, 所以 $u_i(x)\longrightarrow\infty$ 在 Ω_0 的任一紧子集上一致成立. 由于 u_a^ε 关于 ε 是单调的, 故当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时, $u_a^\varepsilon\longrightarrow\infty$ 在 Ω_0 的任一紧子集上一致成立. 因此当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时, $d(x_\varepsilon,\partial\Omega_0)\longrightarrow 0$.

第二步　证明: 若 $m_\varepsilon<C$ 对所有 $\varepsilon>0$ 成立, 则 $\left\{\dfrac{\partial u_a^\varepsilon(x_\varepsilon)}{\partial\nu_\varepsilon}\right\}_{\varepsilon>0}$ 上方有界, 这里 ν_ε 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量, 将在后面具体给出.

只需证明, 对于任一序列 $\varepsilon_i\longrightarrow 0$, 序列 $\left\{\dfrac{\partial u_a^{\varepsilon_i}(x_{\varepsilon_i})}{\partial\nu_{\varepsilon_i}}\right\}_{i=1}^\infty$ 中有一个子列上方有界. 简记

$$u_i=u_a^{\varepsilon_i},\quad x_i=x_{\varepsilon_i},\quad \Omega_i=\{x\in\Omega_0: d(x,\partial\Omega_0)>d(x_i,\partial\Omega_0)\}.$$

显然有 $x_i\in\partial\Omega_i$. 注意到, 若 $x_i\in\partial\Omega_0$, 则 $\Omega_i=\Omega_0$; 若 $\Omega_i\neq\Omega_0$, 那么由第一步的结论知, 当 $i\longrightarrow\infty$ 时 Ω_i 趋向于 Ω_0, 所以对任意 $\Omega'\subset\subset\Omega_0$, 当 i 很大时有 $\Omega'\subset\subset\Omega_i$.

不妨假设 $0<\varepsilon_i<1$. 显然 u_i 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u = au - \big(b(x)+1\big)u^p, & x\in\Omega\setminus\bar{\Omega}_i, \\ u|_{\partial\Omega}=0, & u|_{\partial\Omega_i}=u_i(x_i) \end{cases} \tag{3.6.12}$$

的一个上解, 0 是它的一个下解. 故问题 (3.6.12) 有正解 v_i: $0\leqslant v_i(x)\leqslant u_i(x)$, $x\in\Omega\setminus\Omega_i$. 由 $v_i(x_i)=u_i(x_i)$ 知,

$$\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial\nu_i}\leqslant\frac{\partial v_i(x_i)}{\partial\nu_i},$$

其中 ν_i 是 $\partial\Omega_i$ 上在点 x_i 处的单位内法向量. 只需证明 $\left\{\dfrac{\partial v_i(x_i)}{\partial\nu_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ 上方有界.

显然 $C_0:=\max\{a^{1/(p-1)},C\}$ 是问题 (3.6.12) 的一个上解. 利用定理 3.2.1 得 $v_i\leqslant C_0$, 于是 $-\Delta v_i$ 在 $\Omega\setminus\Omega_i$ 上有与 i 无关的界. 又因为

(1) $v_i|_{\partial\Omega_i}$ 是常数, 并且有与 i 无关的界;

(2) 当 i 很大时, $\partial\Omega_i$ 与 $\partial\Omega_0$ 有相同的光滑性,

应用椭圆型方程的 L^p 理论 (整体估计) 知, 对于任意的 $q>1$, $\|v_i\|_{W^{2,q}(\Omega\setminus\Omega_i)}$ 有界. 利用嵌入定理和 Ω_i 的光滑性又知, $\|v_i\|_{C^1(\bar{\Omega}\setminus\Omega_i)}$ 有界. 特别地, $\{|\nabla v_i(x_i)|\}_{i=1}^{\infty}$ 有界, 从而 $\left\{\dfrac{\partial v_i(x_i)}{\partial\nu_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ 有界.

第三步 证明: 当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时, $m_\varepsilon\longrightarrow\infty$.

如若不然, 则存在 $\varepsilon_i\longrightarrow 0$, 使得 m_{ε_i} 有界. 由第二步知, $\left\{\dfrac{\partial u_i(x_i)}{\partial\nu_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ 上方有界, 其中 ν_i 是 $\partial\Omega_i$ 上在点 x_i 处的单位内法向量. 下面证明这是不可能的.

因为当 i 很大时, $\partial\Omega_i$ 与 $\partial\Omega_0$ 有相同的光滑性, 所以 $\partial\Omega_i$ 有一致内球性质: 存在 $r>0$, 对所有充分大的 i 和任意的 $x\in\partial\Omega_i$, 都存在以 r 为半径的闭球 B_x 满足 $B_x\subset\bar{\Omega}_i$, $B_x\cap\partial\Omega_i=\{x\}$. 记 y_i 是 B_{x_i} 的球心, 并记 $B^i=\{x:|x-y_i|<r/2\}$,

$$\psi(x)=\mathrm{e}^{-\sigma|x-y_i|^2}-\mathrm{e}^{-\sigma r^2},$$

其中 $\sigma>2nr^{-2}$ 是常数.

不妨假设 $\varepsilon_i<1$. 取紧子集 $K\subset\subset\Omega_0$, 使得 $K\supset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B^i$. 从第一步的证明可以看出, 在 K 上 u_i 一致收敛于 ∞. 故存在 $c_i\leqslant\varepsilon_i^{-1/p}$, $c_i\longrightarrow\infty$, 使得

$$u_i(x)\geqslant C+c_i\psi|_{\partial B^i},\ \ \forall\, x\in\partial B^i\subset K.$$

这说明 u_i 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u = au - \varepsilon_i u^p, & x\in B_{x_i}\setminus B^i, \\ u|_{\partial B_{x_i}}=u_i(x_i), & u|_{\partial B^i}=u_i(x_i)+c_i\psi|_{\partial B^i} \end{cases} \tag{3.6.13}$$

的一个上解.

对上面得到的 c_i, 当 i 很大时, 有

$$
\begin{aligned}
&\Delta[u_i(x_i)+c_i\psi]+a[u_i(x_i)+c_i\psi]-\varepsilon_i[u_i(x_i)+c_i\psi]^p\\
\geqslant& c_ie^{-\sigma|x-y_i|^2}[4\sigma^2|x-y_i|^2-2n\sigma]-\varepsilon_ic_i^p[u_i(x_i)/c_i+\psi]^p\\
\geqslant& c_ie^{-\sigma r^2}(\sigma^2r^2-2n\sigma)-[u_i(x_i)+\psi]^p\\
>&0,\quad x\in B_{x_i}\setminus B^i,
\end{aligned}
$$

这说明 $u_i(x_i)+c_i\psi$ 是问题 (3.6.13) 的一个下解. 根据定理 3.2.1, $u_i(x)\geqslant u_i(x_i)+c_i\psi(x)$ 在 $B_{x_i}\setminus B^i$ 上成立. 因而, 当 $i\longrightarrow\infty$ 时

$$
\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial\nu_i}\geqslant c_i\frac{\partial\psi(x_i)}{\partial\nu_i}=c_i2\sigma r\mathrm{e}^{-\sigma r^2}\longrightarrow\infty,
$$

此与第二步的结论相矛盾. 定理得证.

为了更好地了解 u_a^ε 的模式, 我们考虑函数 $w_a^\varepsilon:=\varepsilon^{1/(p-1)}u_a^\varepsilon$. 易知, w_a^ε 是问题

$$
-\Delta w=aw-\big(1+\varepsilon^{-1}b(x)\big)w^p,\quad x\in\Omega;\quad w|_{\partial\Omega}=0 \tag{3.6.14}
$$

的唯一正解. 如果 $a\in(\lambda_1^\Omega,\lambda_1^{\Omega_0})$, 由定理 3.6.3 的结论 (1) 知, 当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时, 在 Ω 内 w_a^ε 一致收敛于 0. 下面考虑 $a>\lambda_1^{\Omega_0}$ 的情况.

设 $\theta_a^0(x)$ 是问题

$$
-\Delta u=au-u^p,\quad x\in\Omega_0;\quad u|_{\partial\Omega_0}=0 \tag{3.6.15}
$$

的唯一正解, 定义

$$
\theta_a^*(x)=\begin{cases}\theta_a^0(x), & x\in\Omega_0,\\ 0, & x\in\bar\Omega\setminus\Omega_0.\end{cases}
$$

定理 3.6.4　假设 $a>\lambda_1^{\Omega_0}$. 那么当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时, 对任意的 $q>1$, 问题 (3.6.14) 的唯一正解 w_a^ε 在 $L^q(\Omega)$ 上收敛于 θ_a^*.

证明　设 θ_a 是问题

$$
-\Delta u=au-u^p,\quad x\in\Omega;\quad u|_{\partial\Omega}=0
$$

的唯一正解. 利用定理 3.2.1, 有 $w_a^\varepsilon\leqslant\theta_a$. 再次利用定理 3.2.1 知, w_a^ε 关于 ε 单调不减. 因此存在极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}w_a^\varepsilon=w_a^0\in\langle 0,\theta_a\rangle$. 进一步, 在 Ω_0 的任一紧子集 K 上, $-\Delta w_a^\varepsilon=aw_a^\varepsilon-(w_a^\varepsilon)^p$ 有与 ε 无关的界. 根据 L^p 估计与嵌入定理, 在空间 $C^1(K)$ 中 $w_a^\varepsilon\longrightarrow w_a^0$.

由于在 Ω 上 $w_a^\varepsilon(x) \leqslant \theta_a(x)$, 用 $w_a^\varepsilon(x)$ 乘以问题 (3.6.14) 的方程并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_a^\varepsilon|^2 \mathrm{d}x &= a\int_\Omega |w_a^\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \big(1+\varepsilon^{-1}b(x)\big)|w_a^\varepsilon|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &\leqslant a\int_\Omega |\theta_a|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.6.16}$$

等式 (3.6.16) 两边同乘以 ε, 再令 $\varepsilon \longrightarrow 0$, 利用控制收敛定理又得

$$\int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_0} b(x)|w_a^0|^{p+1}\mathrm{d}x = \int_\Omega b(x)|w_a^0|^{p+1}\mathrm{d}x = 0.$$

注意到在 $\bar{\Omega}\setminus\bar{\Omega}_0$ 上 $b(x)>0$, 由上式推出, 在 $\Omega\setminus\Omega_0$ 中 $w_a^0 = 0$.

因为在 $\partial\Omega_0$ 上 $w_a^\varepsilon(x) \geqslant 0 = \theta_a^0(x)$, 在 Ω_0 上 $b(x)\equiv 0$, 利用定理 3.2.1 知, 在 Ω_0 内 $w_a^0(x) \geqslant \theta_a^0(x)$. 下面证明, 在 Ω_0 内 $w_a^0(x) = \theta_a^0(x)$. 事实上, 从 $-\Delta w_a^\varepsilon \leqslant a w_a^\varepsilon \leqslant a\theta_a$ 可以推出, $\{w_a^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 又因为 $\|w_a^\varepsilon\|_\infty$ 关于 ε 有界, 所以在 $H_0^1(\Omega)$ 中 w_a^ε 弱收敛于 w_a^0, 对于任意的 $q>1$, 在 $L^q(\Omega)$ 中 w_a^ε 强收敛于 w_a^0 (习题 3.5). 由于在 $\Omega\setminus\Omega_0$ 中 $w_a^0=0$, 并且 $\partial\Omega_0$ 光滑, 故 $w_a^0|_{\Omega_0} \in H_0^1(\Omega_0)$. 由此容易推出 $w_a^0|_{\Omega_0}$ 是问题 (3.6.15) 的一个正的弱解. 再利用椭圆型方程的正则性理论, $w_a^0|_{\Omega_0}$ 又是问题 (3.6.15) 的一个正的古典解. 注意到 θ_a^0 是问题 (3.6.15) 的唯一正解, 故有 $w_a^0 = \theta_a^0$, $x\in\Omega_0$, 从而 $w_a^0 = \theta_a^*$. 证毕.

对于退化的 Logistic 方程的齐次 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = au - b(x)u^p, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.6.17}$$

其中区域 Ω, 常数 a, p 和函数 $b(x)$ 同上. 关于正解的存在性和渐近性, 我们有与定理 3.6.1 类似的结论.

定理 3.6.5 假设在 $\bar{\Omega}$ 上 $b(x)$ 是连续、非负且不恒为零的函数, 集合 $\Omega_0^* := \{x\in\bar{\Omega} : b(x)=0\}$ 的内部 Ω_0 不空. 那么存在 $a^*\in(0,\lambda_1^{\Omega_0}]$, 当 $a\in(0,a^*)$ 时问题 (3.6.17) 有唯一正解, 记为 u_a, 而当 $a>a^*$ 时问题 (3.6.17) 没有正解. 此外,

(1) 当 a 单调增加趋于 a^* 时, $\|u_a\|_\infty \longrightarrow \infty$;

(2) 如果又设 Ω_0 的边界 $\partial\Omega_0\in C^2$, 那么 $a^* = \lambda_1^{\Omega_0}$.

证明 对于 $\phi\in C(\bar{\Omega})$, 用 $\lambda_1^{\Omega,N}(\phi)$ 表示在 Ω 中算子 $-\Delta+\phi$ 带有齐次 Neumann 边界条件的主特征值, 那么 $\lambda_1^{\Omega,N}(\phi) < \lambda_1^{\Omega}(\phi)$, 并且 $\lambda_1^{\Omega,N}(\phi)$ 关于 ϕ 连续且严格递增, 即当 $\phi_1\leqslant\phi_2$ 且 $\phi_1\neq\phi_2$ 时, 有

$$\lambda_1^{\Omega,N}(\phi_1) < \lambda_1^{\Omega,N}(\phi_2).$$

同时还有 $\lambda_1^{\Omega,N}(0)=0$, 对应的单位化的正特征函数 $\psi=1$. 第一部分的结论以及第二部分的结论 (1) 的证明同于定理 3.6.1.

第二部分的结论 (2) 的证明同于定理 3.6.2 的证明中的第一步. 证毕.

3.7 弱耦合方程组的上下解方法

同于 3.3 节, 本节建立弱耦合方程组的边值问题的上下解方法. 首先利用不动点定理证明, 如果所讨论的问题具有有序的耦合上下解, 那么它在上下解之间一定存在解. 其次借助于有序的耦合上下解构造单调迭代序列, 进而得到位于上下解之间的最大拟解和最小拟解的存在性. 前一种方法通常称为上下解方法中的不动点方法, 后一种方法通常称为上下解方法中的单调迭代方法.

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域. 我们考虑弱耦合方程组的边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_k u_k = f_k\big(x,u_k,[u]_k\big), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}_k u_k=\phi_k, & x\in\partial\Omega,\\ k=1,\cdots,m, \end{cases} \tag{3.7.1}$$

其中 $\mathscr{L}_k$ 是 Ω 上的一致椭圆算子, $\mathscr{B}_k=a_k(x)+b_k(x)\dfrac{\partial}{\partial\nu}$, 函数 $a_k(x),b_k(x)\geqslant 0$ 并且 $a_k(x)+b_k(x)>0$,

$$u=(u_1,\cdots,u_m),\quad [u]_k=(u_1,\cdots,u_{k-1},u_{k+1},\cdots,u_m).$$

本节总假设 f_k 关于 x,u 属于 C^α, ϕ_k 可以延拓成 $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ 中的函数.

先约定一个记号. 给定 $v=(v_1,\cdots,v_m)$ 和 $w=(w_1,\cdots,w_m)$, 如果对于所有的 $k\in\{1,\cdots,m\}$, 都有 $v_k\leqslant w_k$, 就记成 $v\leqslant w$, 并记

$$\langle v,w\rangle=\big\{u:\ v(x)\leqslant u(x)\leqslant w(x),\ \ \forall\ x\in\bar\Omega\big\}.$$

在上面的这个集合中, u 的光滑性视不同情况而定.

从 3.3 节的讨论我们看出, 方程式的上下解的定义非常简单. 但是对于方程组而言, 为了建立上下解方法, 上下解的定义强烈地依赖于由右端项 f_k 构成的系统 $f:=\big\{f_1,\cdots,f_m\big\}$ 的性质.

3.7.1 解的存在性

在这一部分, 我们使用一般形式的上下解的定义. 在第二部分, 即 3.7.2 节, 为了构造单调迭代序列, 我们将根据系统 $f=\big\{f_1,\cdots,f_m\big\}$ 的具体性质来定义上下解.

定义 3.7.1 假设函数 $\bar{u},\underline{u}\in[C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)]^m$. 称 $\bar{u},\underline{u}$ 为问题 (3.7.1) 的有序耦合上下解 (有时又简称为有序上下解), 如果 $\bar{u}\geqslant\underline{u}$, 并且

$$\begin{cases}\mathscr{L}_k\bar{u}_k\geqslant f_k\big(x,\bar{u}_k,[u]_k\big), & \forall\ [\underline{u}]_k\leqslant[u]_k\leqslant[\bar{u}]_k, \quad x\in\Omega,\\ \mathscr{L}_k\underline{u}_k\leqslant f_k\big(x,\underline{u}_k,[u]_k\big), & \forall\ [\underline{u}]_k\leqslant[u]_k\leqslant[\bar{u}]_k, \quad x\in\Omega,\\ \mathscr{B}_k\bar{u}_k\geqslant\phi_k\geqslant\mathscr{B}_k\underline{u}_k, & \qquad\qquad\qquad\qquad x\in\partial\Omega,\\ k=1,\cdots,m.\end{cases}$$

定理 3.7.1 假设函数 $\bar{u},\underline{u}\in[C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)]^m$ 为问题 (3.7.1) 的有序耦合上下解. 又设存在正常数 M_k, 对所有的 $\underline{u}\leqslant v\leqslant\bar{u}$ 和 $1\leqslant k\leqslant m$, 都有

$$\begin{cases}f_k\big(x,\bar{u}_k,[v]_k\big)-f_k\big(x,v_k,[v]_k\big)\geqslant-M_k(\bar{u}_k-v_k), & x\in\Omega,\\ f_k\big(x,v_k,[v]_k\big)-f_k\big(x,\underline{u}_k,[v]_k\big)\geqslant-M_k(v_k-\underline{u}_k), & x\in\Omega,\end{cases}$$

那么问题 (3.7.1) 存在解 u, 并且满足 $\underline{u}\leqslant u\leqslant\bar{u}$.

证明 对于任意的 $v\in[C(\bar{\Omega})]^m$, 考虑下面的线性问题:

$$\begin{cases}\mathscr{L}_ku_k+M_ku_k=f_k\big(x,v_k,[v]_k\big)+M_kv_k, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}_ku_k=\phi_k, & x\in\partial\Omega,\\ k=1,\cdots,m.\end{cases}\tag{3.7.2}$$

由于

$$F_k(x)=f_k\big(x,v_k(x),[v]_k(x)\big)+M_kv_k(x)\in L^\infty(\Omega),$$

所以问题 (3.7.2) 有唯一解 $u\in[C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})]^m$, 记成 $u=Tv$. 此外, 根据椭圆型方程的 L^p 理论, 对于任意的 $p>1$, 有

$$\begin{aligned}\|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega)}&\leqslant C\|f_k(x,v_k,[v]_k)\|_p+M_k\|v_k\|_p+\|\phi_k\|_{W^{2,p}(\Omega)}\\ &\leqslant C\big(\|f_k(x,v_k,[v]_k)\|_\infty+\|v_k\|_\infty\big)+\|\phi_k\|_{W^{2,p}(\Omega)},\end{aligned}$$

于是

$$|u_k|_{1+\alpha}\leqslant C\big(\|f_k(x,v_k,[v]_k)\|_\infty+\|v_k\|_\infty+\|\phi_k\|_{W^{2,p}(\Omega)}\big).$$

因为 $f_k(x,v)$ 关于 x 和 v 属于 C^α, 当然关于 x 和 v 连续. 从上面的估计式可以看出, 当 v 属于 $[C(\bar{\Omega})]^m$ 的有界集时, u 属于 $[C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})]^m$ 的有界集.

为证 $T:[C(\bar{\Omega})]^m\longrightarrow[C(\bar{\Omega})]^m$ 是紧算子, 只需证明 $T:[C(\bar{\Omega})]^m\longrightarrow[C(\bar{\Omega})]^m$ 是连续的. 事实上, 对于 $v^{(i)}\in[C(\bar{\Omega})]^m$, 记 $u^{(i)}=Tv^{(i)}$, $i=1,2$, $w=u^{(1)}-u^{(2)}$, 那么 w 满足

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k w_k + M_k w_k &= \mathscr{L}_k u_k^{(1)} + M_k u_k^{(1)} - \mathscr{L}_k u_k^{(2)} - M_k u_k^{(2)} \\ &= f_k\big(x, v_k^{(1)}, [v^{(1)}]_k\big) + M_k v_k^{(1)} - f_k\big(x, v_k^{(2)}, [v^{(2)}]_k\big) - M_k v_k^{(2)} \\ &\equiv \hat{F}_k(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathscr{B}_k w_k &= \mathscr{B}_k u_k^{(1)} - \mathscr{B}_k u_k^{(2)} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ k &= 1, \cdots, m.\end{aligned}$$

由于 $f_k(x,v)$ 关于 x 和 v 属于 C^α, 所以

$$|\hat{F}_k(x)| \leqslant C|v^{(1)} - v^{(2)}|^\alpha + M_k|v_k^{(1)} - v_k^{(2)}|.$$

因此对于任意的 $p > 1$, 有

$$\begin{aligned}\|w_k\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leqslant C\big(\||v^{(1)} - v^{(2)}|^\alpha\|_p + \|v_k^{(1)} - v_k^{(2)}\|_p\big) \\ &\leqslant C\big(\|v^{(1)} - v^{(2)}\|_\infty^\alpha + \|v_k^{(1)} - v_k^{(2)}\|_\infty\big).\end{aligned}$$

从而有

$$|w_k|_{1+\alpha} \leqslant C\big(\|v^{(1)} - v^{(2)}\|_\infty^\alpha + \|v_k^{(1)} - v_k^{(2)}\|_\infty\big).$$

这说明 $T: [C(\bar{\Omega})]^m \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ 是连续的, 故 $T: [C(\bar{\Omega})]^m \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ 是紧的.

取集合

$$U = \big\{u \in [C(\bar{\Omega})]^m : \underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}\big\},$$

那么 U 是 $[C(\bar{\Omega})]^m$ 中的有界闭凸集. 因为 $T: [C(\bar{\Omega})]^m \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ 是紧算子, 所以 $T: U \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ 也是紧算子.

下面证明 $T: U \longrightarrow U$. 设 $v \in U$, $u = Tv$ 并令 $w_k = \bar{u}_k - u_k$. 因为当 $v \in U$ 时, $\underline{u} \leqslant v \leqslant \bar{u}$, 所以 $\bar{u}_k$ 满足

$$\begin{cases}\mathscr{L}_k \bar{u}_k + M_k \bar{u}_k \geqslant f_k\big(x, \bar{u}_k, [v]_k\big) + M_k \bar{u}_k, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}_k \bar{u}_k \geqslant \phi_k, & x \in \partial\Omega,\end{cases}$$

从而 w_k 满足

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k w_k + M_k w_k &\geqslant f_k\big(x, \bar{u}_k, [v]_k\big) - f_k\big(x, v_k, [v]_k\big) + M_k(\bar{u}_k - v_k) \\ &\geqslant 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathscr{B}_k w_k &\geqslant 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

由最大值原理得 $w_k \geqslant 0$, 即 $u_k \leqslant \bar{u}_k$. 同理, $\underline{u}_k \leqslant u_k$. 因此 $T: U \longrightarrow U$. 根据 Schauder 不动点定理 (定理 4.2.2), T 在 U 上存在不动点 u, 因而 u 是问题 (3.7.1) 的解. 利用椭圆型方程的正则性理论知, u 是问题 (3.7.1) 的古典解. 证毕.

3.7.2 单调迭代序列

单调迭代方法实际上是构造单调迭代序列, 而后研究迭代序列的收敛性并证明其极限函数是所研究的问题的耦合拟解. 为了构造单调迭代序列, 需要根据系统 $f=\{f_1,\cdots,f_m\}$ 的具体性质来定义上下解. 把 $\{u_1,\cdots,u_{k-1},u_{k+1},\cdots,u_m\}$ 分解成不相交的子集 $[u]_{b_k}$ 和 $[u]_{d_k}$ 的并, 它们分别有 b_k 和 d_k 个分量. 显然 $b_k+d_k=m-1$. 把问题 (3.7.1) 写成

$$\begin{cases}\mathscr{L}_k u_k=f_k\big(x,u_k,[u]_{b_k},[u]_{d_k}\big), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}_k u_k=\phi_k, & x\in\partial\Omega,\\ k=1,\cdots,m.\end{cases}\tag{3.7.3}$$

定义 3.7.2 假设函数 $w,v\in[C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)]^m$, 并且在 Ω 上 $v\leqslant w$. 称系统 f 在区间 $\langle v,w\rangle$ 上具有混拟单调性, 如果对于每一个 $k\in\{1,\cdots,m\}$ 和任意固定的 $x\in\Omega$, 当 $u\in\langle v,w\rangle$ 时, 作为 $[u]_{b_k}$ 和 $[u]_{d_k}$ 的函数, $f_k\big(x,u_k,[u]_{b_k},[u]_{d_k}\big)$ 关于 $[u]_{b_k}$ 单调不减, 关于 $[u]_{d_k}$ 单调不增.

定义 3.7.3 给定函数 $\bar u,\underline{u}\in[C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)]^m$, 满足 $\underline{u}\leqslant\bar u$. 假设系统 f 在区间 $\langle\underline{u},\bar u\rangle$ 上具有混拟单调性. 称 $\bar u,\underline{u}$ 为问题 (3.7.3) 的有序耦合上下解 (有时又简称为有序上下解), 如果

$$\begin{cases}\mathscr{L}_k\bar u_k\geqslant f_k\big(x,\bar u_k,[\bar u]_{b_k},[\underline{u}]_{d_k}\big), & x\in\Omega,\\ \mathscr{L}_k\underline{u}_k\leqslant f_k\big(x,\underline{u}_k,[\underline{u}]_{b_k},[\bar u]_{d_k}\big), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}_k\bar u_k\geqslant\phi_k\geqslant\mathscr{B}_k\underline{u}_k, & x\in\partial\Omega,\\ k=1,\cdots,m.\end{cases}$$

注 3.7.1 当 f 具有混拟单调性时, 定义 3.7.1 中的有序耦合上下解的定义与这里的定义一致.

定义 3.7.4 给定函数 $u,v\in[C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)]^m$, 记

$$\bar u_k(x)=\max\{u_k(x),v_k(x)\},\quad \underline{u}_k(x)=\min\{u_k(x),v_k(x)\},$$
$$\bar u=(\bar u_1,\cdots,\bar u_m),\quad \underline{u}=(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m).$$

假设系统 f 在区间 $\langle\underline{u},\bar u\rangle$ 上具有混拟单调性. 如果 u,v 满足

$$\begin{cases}\mathscr{L}_k u_k=f_k\big(x,u_k,[u]_{b_k},[v]_{d_k}\big), & x\in\Omega,\\ \mathscr{L}_k v_k=f_k\big(x,v_k,[v]_{b_k},[u]_{d_k}\big), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}_k u_k=\phi_k=\mathscr{B}_k v_k, & x\in\partial\Omega,\\ k=1,\cdots,m,\end{cases}$$

则称 u 和 v 是问题 (3.7.3) 的耦合拟解.

这里需要指出, 在上面的耦合拟解和有序耦合上下解的定义中, 已经包含了系统 f 具有混拟单调性.

定理 3.7.2 假设函数 $\bar{u}, \underline{u} \in [C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)]^m$ 为问题 (3.7.3) 的有序耦合上下解. 又设存在正常数 M_k, 使得

$$f_k\big(x, w_k, [z]_{b_k}, [z]_{d_k}\big) - f_k\big(x, v_k, [z]_{b_k}, [z]_{d_k}\big) \geqslant -M_k(w_k - v_k)$$

对于所有的 $\underline{u}_k \leqslant v_k \leqslant w_k \leqslant \bar{u}_k$, $x \in \bar{\Omega}$ 以及 $\underline{u} \leqslant z \leqslant \bar{u}$ 都成立. 那么存在单调序列 $\{\underline{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, 满足

$$\underline{u} \leqslant \underline{u}^{(i)} \leqslant \underline{u}^{(i+1)} \leqslant \bar{u}^{(i+1)} \leqslant \bar{u}^{(i)} \leqslant \bar{u}, \quad \forall\, i \geqslant 1.$$

因此极限

$$\lim_{i\to\infty} \underline{u}^{(i)} = \tilde{u}, \quad \lim_{i\to\infty} \bar{u}^{(i)} = \hat{u}$$

存在, 并且 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 是问题 (3.7.3) 的耦合拟解. 同时 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 还是问题 (3.7.3) 位于区间 $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ 中的最小拟解和最大拟解, 即对于问题 (3.7.3) 的任意耦合拟解 u 和 v, 都有

$$\tilde{u} \leqslant u, \quad v \leqslant \hat{u}.$$

证明 对于任意给定的 $v, w \in [C(\bar{\Omega})]^m$, 边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_k u_k + M_k u_k = f_k\big(x, v_k, [v]_{b_k}, [w]_{d_k}\big) + M_k v_k, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}_k u_k = \phi_k, & x \in \partial\Omega, \\ k = 1, \cdots, m \end{cases}$$

有唯一解 $u \in [C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})]^m$, 记成 $u = T(v, w)$. 定义

$$\underline{u}^{(1)} = T(\underline{u}, \bar{u}), \quad \bar{u}^{(1)} = T(\bar{u}, \underline{u}), \quad \underline{u}^{(i+1)} = T(\underline{u}^{(i)}, \bar{u}^{(i)}), \quad \bar{u}^{(i+1)} = T(\bar{u}^{(i)}, \underline{u}^{(i)}).$$

下面证明序列$\{\underline{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 都是单调的并且有极限.

令 $v_k = \bar{u}_k - \bar{u}_k^{(1)}$. 因为 $\bar{u}$ 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}_k \bar{u}_k + M_k \bar{u}_k \geqslant f_k\big(x, \bar{u}_k, [\bar{u}]_{b_k}, [\underline{u}]_{d_k}\big) + M_k \bar{u}_k, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}_k \bar{u}_k \geqslant \phi_k, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

所以 v_k 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}_k v_k + M_k v_k \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ \mathscr{B}_k v_k \geqslant 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由最大值原理得 $v_k \geqslant 0$, 即 $\bar{u}_k \geqslant \bar{u}_k^{(1)}$. 同理可证 $\underline{u}_k \leqslant \underline{u}_k^{(1)}$.

令 $w_k = \bar{u}_k^{(1)} - \underline{u}_k^{(1)}$. 因为 $\underline{u} \leqslant \bar{u}$, 利用 f 的单调性知, w_k 满足

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k w_k + M_k w_k &= f_k\big(x, \bar{u}_k, [\bar{u}]_{b_k}, [\underline{u}]_{d_k}\big) - f_k\big(x, \underline{u}_k, [\underline{u}]_{b_k}, [\bar{u}]_{d_k}\big) + M_k(\bar{u}_k - \underline{u}_k)\\ &\geqslant f_k\big(x, \bar{u}_k, [\underline{u}]_{b_k}, [\underline{u}]_{d_k}\big) - f_k\big(x, \underline{u}_k, [\underline{u}]_{b_k}, [\underline{u}]_{d_k}\big) + M_k(\bar{u}_k - \underline{u}_k)\\ &\geqslant 0, \quad x \in \Omega,\\ \mathscr{B}_k w_k &= 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

由最大值原理知, $w_k \geqslant 0$, 即 $\bar{u}_k^{(1)} \geqslant \underline{u}_k^{(1)}$.

再令 $z_k = \bar{u}_k^{(1)} - \bar{u}_k^{(2)}$, 那么 z_k 满足

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k z_k + M_k z_k &= f_k\big(x, \bar{u}_k, [\bar{u}]_{b_k}, [\underline{u}]_{d_k}\big) - f_k\big(x, \bar{u}_k^{(1)}, [\bar{u}^{(1)}]_{b_k}, [\underline{u}^{(1)}]_{d_k}\big) + M_k(\bar{u}_k - \bar{u}_k^{(1)})\\ &\geqslant f_k\big(x, \bar{u}_k, [\bar{u}^{(1)}]_{b_k}, [\underline{u}]_{d_k}\big) - f_k\big(x, \bar{u}_k^{(1)}, [\bar{u}^{(1)}]_{b_k}, [\underline{u}]_{d_k}\big) + M_k(\bar{u}_k - \bar{u}_k^{(1)})\\ &\geqslant 0, \quad x \in \Omega,\\ \mathscr{B}_k z_k &= 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

从而有 $z_k \geqslant 0$, 即 $\bar{u}_k^{(1)} \geqslant \bar{u}_k^{(2)}$.

用归纳法可证,

$$\underline{u} \leqslant \underline{u}^{(i)} \leqslant \bar{u}^{(i)} \leqslant \bar{u}, \quad \forall\, i.$$

下面, 我们简记

$$f_{ki}(x) = f_k\big(x, \underline{u}_k^{(i)}, [\underline{u}^{(i)}]_{b_k}, [\bar{u}^{(i)}]_{d_k}\big), \quad f_{ki}^*(x) = f_k\big(x, \bar{u}_k^{(i)}, [\bar{u}^{(i)}]_{b_k}, [\underline{u}^{(i)}]_{d_k}\big).$$

因为 $\underline{u}^{(i)}, \bar{u}^{(i)} \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, 所以 $\|f_{ki}\|_\infty \leqslant C$, $\|f_{ki}^*\|_\infty \leqslant C$. 先利用 L^p 理论知,

$$\|\underline{u}_k^{(i)}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C_1, \quad \|\bar{u}_k^{(i)}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C_1,$$

这里的 $p > n$. 注意到 $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 故有 f_{ki}, $f_{ki}^* \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 并且

$$|f_{ki}|_\alpha \leqslant C_2, \quad |f_{ki}^*|_\alpha \leqslant C_2.$$

再利用 Schauder 理论又知

$$|\underline{u}_k^{(i)}|_{2+\alpha} \leqslant C_3, \quad |\bar{u}_k^{(i)}|_{2+\alpha} \leqslant C_3.$$

这里的正常数 C, C_1, C_2 和 C_3 都与 i 无关. 由于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ 是紧的, 故 $\{\underline{u}^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 和 $\{\bar{u}^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 都存在子序列, 在 $[C^2(\bar{\Omega})]^m$ 中分别收敛到 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$. 又因为

$\{\underline{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 都是单调有界的, 所以在点点的意义下它们都有极限. 根据极限的唯一性, 它们的极限分别是 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$. 再次利用极限的唯一性又知, 在 $[C^2(\bar{\Omega})]^m$ 中 $\underline{u}^{(i)} \longrightarrow \tilde{u}$, $\bar{u}^{(i)} \longrightarrow \hat{u}$. 在等式

$$\underline{u}^{(i+1)} = T\big(\underline{u}^{(i)}, \bar{u}^{(i)}\big), \qquad \bar{u}^{(i+1)} = T\big(\bar{u}^{(i)}, \underline{u}^{(i)}\big)$$

中令 $i \longrightarrow \infty$ 推得, $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 是问题 (3.7.3) 的耦合拟解.

下面证明 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 是问题 (3.7.3) 位于 $\langle\underline{u}, \bar{u}\rangle$ 中的最小拟解和最大拟解. 假设 $u, v \in \langle\underline{u}, \bar{u}\rangle$ 是问题 (3.7.3) 的耦合拟解, 则 $u = T(u, v)$, $v = T(v, u)$. 同于 $\{\underline{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 的单调性的证明可证, $\underline{u}^{(i)} \leqslant u, v \leqslant \bar{u}^{(i)}$ 对于所有的 i 都成立, 故有 $\tilde{u} \leqslant u, v \leqslant \hat{u}$. 证毕.

需要指出的是, 该定理只是给出了耦合拟解的存在性, 在应用中并没有太大的作用. 自然要问: 在什么条件下, 这样的耦合拟解是原问题的解? 从前面的迭代过程可以看出, 当所有的 $d_k = 0$, 即 f 是拟增系统时, 上面得到的 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 都是问题 (3.7.3) 的解, 并且还是位于 $\langle\underline{u}, \bar{u}\rangle$ 中的最小解和最大解. 当 f 不是拟增系统时, 结果就很难判断. 按照耦合拟解的定义, 我们把 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_m)$, $\hat{u} = (\hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_m)$ 混合在一起, 再重新分组. 如果能够分成

$$\big\{\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_m, \hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_m\big\} = \big\{v_1, \cdots, v_m\big\} \cup \big\{w_1, \cdots, w_m\big\},$$

并且 $v = (v_1, \cdots, v_m)$ 和 $w = (w_1, \cdots, w_m)$ 都是问题 (3.3.3) 的解, 问题就解决了. 例如, 当 $m = 2$ 并且 $b_1 = b_2 = 0$ (即 f 是拟减系统) 时, 上面得到的 $(\tilde{u}_1, \hat{u}_2)$ 和 $(\hat{u}_1, \tilde{u}_2)$ 都是问题 (3.7.3) 的解. 对于一般情况, 要具体问题具体分析.

上面已经指出, 利用迭代格式得到的极限一般来讲不是原问题的解, 而且单调迭代方法中的上下解的定义中又要求系统 f 具有混拟单调性. 与不动点方法相比较, 单调迭代方法中的条件强、结果差, 看起来单调迭代方法对于方程组似乎没有用处. 实际上, 对于方程组而言, 单调迭代方法的作用是方便近似计算.

3.8 弱耦合方程组的例子

本节采用上下解方法研究竞争共栖模型的齐次 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \alpha u_1\Big(1 - u_1 - \dfrac{a u_2}{1 + m u_3}\Big), & x \in \Omega, \\ -\Delta u_2 = \beta u_2(1 - u_2 - b u_1), & x \in \Omega, \\ -\Delta u_3 = u_3\Big(1 - \dfrac{u_3}{L_0 + \ell u_1}\Big), & x \in \Omega, \\ u_1 = u_2 = u_3 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8.1}$$

对于方程式的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta w + q(x)w = kw - f(x)w^2, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.8.2}$$

假定 $q, f \in C(\bar{\Omega})$ 且在 $\bar{\Omega}$ 上 $f > 0$, k 是一个常数, 那么当 $k > \lambda_1(q)$ 时, 问题 (3.8.2) 存在唯一正解 (见定理 3.4.4), 记为 $\phi_{[q,\,k,\,f]}$. 根据比较原理, $\phi_{[q,\,k,\,f]}$ 关于 k 单增, 关于 q 和 f 单减. 如果还有 $q(x) \geqslant 0$, 那么 $\phi_{[q,\,k,\,k]} < 1$. 由于当 $k \leqslant \lambda_1(q)$ 时, 问题 (3.8.2) 没有正解, 我们定义 $\phi_{[q,\,k,\,f]} = 0$. 记

$$\phi_\alpha = \phi_{[0,\,\alpha,\,\alpha]}, \quad \phi_\beta = \phi_{[0,\,\beta,\,\beta]},$$

则

$$0 \leqslant \phi_\alpha,\ \phi_\beta,\ \phi_{[\alpha a\phi_\beta,\,\alpha,\,\alpha]},\ \phi_{[b\beta\phi_\alpha,\,\beta,\,\beta]} < 1.$$

利用椭圆型方程的正则性理论知

$$\phi_\alpha,\ \phi_\beta,\ \phi_{[\alpha a\phi_\beta,\,\alpha,\,\alpha]},\ \phi_{[b\beta\phi_\alpha,\,\beta,\,\beta]} \in C^{2+\sigma}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \sigma < 1.$$

我们首先给出边值问题 (3.8.1) 存在正解的必要条件. 所谓正解, 即是满足

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x) > 0, \quad \forall\, x \in \Omega$$

的解, 有时也称为共存解.

定理 3.8.1 **如果问题 (3.8.1) 有正解 (u_1, u_2, u_3), 那么下面的估计成立:**

$$\begin{cases} \lambda_1 < \min\{1,\,\alpha,\,\beta\}, \quad \lambda_1(\alpha[\phi_\alpha + a\phi_\beta]) > \alpha,\ \lambda_1(\beta[\phi_\beta + b\phi_\alpha]) > \beta, \\ u_1(x) < \phi_\alpha(x), \quad u_2(x) < \phi_\beta(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.8.3}$$

特别地, 如果 $\alpha = \beta$ 且 $a, b < 1$, 则有

$$\lambda_1(\alpha a\phi_\beta) = \lambda_1(\alpha a\phi_\alpha) < \alpha = \beta, \quad \lambda_1(b\beta\phi_\alpha) = \lambda_1(b\alpha\phi_\alpha) < \alpha = \beta.$$

证明 设 (u_1, u_2, u_3) 是 (3.8.1) 的正解, 则有

$$\begin{cases} -\Delta u_1 < \alpha u_1(1 - u_1), & x \in \Omega, \\ u_1 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

这表明 u_1 是问题 (3.8.2) 当 $q(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv k = \alpha$ 时的一个正的严格下解. 由习题 3.7 知, $\alpha > \lambda_1$ 且 $u_1 < \phi_\alpha$. 类似地可以推出 $\beta > \lambda_1$ 且 $u_2 < \phi_\beta$. 再由 u_3 的方程知

$$\begin{cases} -\Delta u_3 < u_3, & x \in \Omega, \\ u_3 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

利用推论 2.3.1, 我们有 $\lambda_1 < 1$.

根据上面的讨论, 从问题 (3.8.1) 便可得到

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \alpha(\phi_\alpha + a\phi_\beta)u_1 > \alpha u_1, & x \in \Omega, \\ -\Delta u_2 + \beta(\phi_\beta + b\phi_\alpha)u_2 > \beta u_2, & x \in \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8.4}$$

由于 $u_1, u_2 > 0$, 把推论 2.3.1 用于问题 (3.8.4) 便得

$$\lambda_1(\alpha[\phi_\alpha + a\phi_\beta]) > \alpha, \quad \lambda_1(\beta[\phi_\beta + b\phi_\alpha]) > \beta.$$

至此, 我们证明了不等式组 (3.8.3) 成立. 第二个结论可由引理 3.4.1 推出. 证毕.

下面给出存在正解的充分条件.

定理 3.8.2　如果下面的条件成立:

$$\lambda_1 < 1, \ \ \lambda_1(\alpha a\phi_\beta) < \alpha, \ \ \lambda_1(b\beta\phi_\alpha) < \beta, \tag{3.8.5}$$

那么问题 (3.8.1) 至少有一个正解.

推论 3.8.1　如果 $\alpha = \beta$ 且 $a, b < 1$, 则问题 (3.8.1) 有正解的充分必要条件是不等式组 (3.8.5) 成立.

定理 3.8.2 的证明　通过构造上下解来证明. 由不等式组 (3.8.5) 知, $\lambda_1 < \min\{1, \alpha, \beta\}$, 故 ϕ_α, ϕ_β 存在. 记 $\bar{u}_1 := \phi_\alpha$, $\bar{u}_2 := \phi_\beta$, 则有

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u}_1 = \alpha\bar{u}_1(1 - \bar{u}_1), & x \in \Omega, \\ \bar{u}_1 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8.6}$$

和

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u}_2 = \beta\bar{u}_2(1 - \bar{u}_2), & x \in \Omega, \\ \bar{u}_2 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8.7}$$

因为 $\lambda_1(\alpha a\phi_\beta) < \alpha$ 且 $\lambda_1(b\beta\phi_\alpha) < \beta$, 根据定理 3.4.4, 函数 $\phi_{[\alpha a\phi_\beta,\, \alpha,\, \alpha]}$ 和 $\phi_{[b\beta\phi_\alpha,\, \beta,\, \beta]}$ 都存在. 记 $\underline{u}_1 := \phi_{[\alpha a\phi_\beta,\, \alpha,\, \alpha]}$, $\underline{u}_2 := \phi_{[b\beta\phi_\alpha,\, \beta,\, \beta]}$, 我们有

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u}_1 = \alpha\underline{u}_1(1 - \underline{u}_1 - a\bar{u}_2), & x \in \Omega, \\ \underline{u}_1 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8.8}$$

和

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u}_2 = \beta\underline{u}_2(1 - \underline{u}_2 - b\bar{u}_1), & x \in \Omega, \\ \underline{u}_2 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8.9}$$

由于 $\lambda_1 < 1$, 根据定理 3.4.4, 问题

$$\begin{cases} -\Delta u_3 = u_3\left(1 - \dfrac{u_3}{L_0 + \ell\phi_\alpha}\right), & x \in \Omega, \\ u_3 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8.10}$$

和

$$\begin{cases} -\Delta u_3 = u_3\left(1 - \dfrac{u_3}{L_0 + \ell\phi_{[\alpha a\phi_\beta,\, \alpha,\, \alpha]}}\right), & x \in \Omega, \\ u_3 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8.11}$$

分别有唯一正解, 记为 $\bar{u}_3$ 和 $\underline{u}_3$.

显然 $\underline{u}_i, \bar{u}_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. 根据问题 (3.8.6) ~ (3.8.9), 利用比较原理可得 $\underline{u}_i < \bar{u}_i$, $i = 1, 2$. 例如, 由问题 (3.8.8) 知

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u}_1 = \alpha\underline{u}_1(1 - \underline{u}_1 - a\bar{u}_2) < \alpha\underline{u}_1(1 - \underline{u}_1), & x \in \Omega, \\ \underline{u}_1 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

这表明 $\underline{u}_1$ 是问题 (3.8.6) 的一个正的严格下解, 而问题 (3.8.6) 有唯一正解 $\bar{u}_1 = \phi_\alpha$, 由习题 3.7 知, $\underline{u}_1 < \bar{u}_1$. 再根据问题 (3.8.10) 和问题 (3.8.11), 类似于上面的讨论可以推出 $\underline{u}_3 < \bar{u}_3$.

利用 $\underline{u}_i < \bar{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 以及问题 (3.8.7) ~ (3.8.11) 便可推出, $(\bar{u}_1, \underline{u}_2, \bar{u}_3)$ 和 $(\underline{u}_1, \bar{u}_2, \underline{u}_3)$ 分别满足

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}_1 = \alpha\bar{u}_1(1 - \bar{u}_1) > \alpha\bar{u}_1\left(1 - \bar{u}_1 - \dfrac{a\underline{u}_2}{1 + m\bar{u}_3}\right), & x \in \Omega, \\ -\Delta \underline{u}_2 = \beta\underline{u}_2(1 - \underline{u}_2 - b\bar{u}_1), & x \in \Omega, \\ -\Delta \bar{u}_3 = \bar{u}_3\left(1 - \dfrac{\bar{u}_3}{L_0 + \ell\bar{u}_1}\right), & x \in \Omega, \\ \bar{u}_1 = \underline{u}_2 = \bar{u}_3 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u}_1 = \alpha\underline{u}_1(1 - \underline{u}_1 - a\bar{u}_2) < \alpha\underline{u}_1\left(1 - \underline{u}_1 - \dfrac{a\bar{u}_2}{1 + m\underline{u}_3}\right), & x \in \Omega, \\ -\Delta \bar{u}_2 > \beta\bar{u}_2(1 - \bar{u}_2 - b\underline{u}_1), & x \in \Omega, \\ -\Delta \underline{u}_3 = \underline{u}_3\left(1 - \dfrac{\underline{u}_3}{L_0 + \ell\underline{u}_1}\right), & x \in \Omega, \\ \underline{u}_1 = \bar{u}_2 = \underline{u}_3 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

这表明 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ 和 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ 是问题 (3.8.1) 的有序耦合上下解. 运用椭圆型方程组的上下解方法, 问题 (3.8.1) 至少有一个解 (u_1, u_2, u_3) 且满足 $\underline{u}_i \leqslant u_i \leqslant \bar{u}_i$, $i = 1, 2, 3$. 因此问题 (3.8.1) 至少有一个正解. 定理 3.8.2 得证.

3.9 强耦合方程组的上下解方法

对于强耦合方程组的边值问题, 也可以建立上下解方法. 我们仅以下面的问题为例, 做一个简要介绍, 更多细节和应用可以参看相关文献 [12,13,14].

考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta A(u,v) = f_1(u,v), & x \in \Omega, \\ -\Delta B(u,v) = f_2(u,v), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.9.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域. 假设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 中的凸集, $(0,0) \in \mathscr{U}$, 函数 $f_1(u,v)$ 和 $f_2(u,v)$ 在 $\mathscr{U}$ 上都是 Lipschitz 连续的. 又设 $A(0,0) = B(0,0) = 0$, 在 $\mathscr{U}$ 上, 映射 $(A,B) : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{V}$ 二次连续可微并且存在一次连续可微的逆映射 (A^*, B^*). 记

$$w = A(u,v), \quad z = B(u,v),$$

由此可唯一解出

$$u = A^*(w,z), \quad v = B^*(w,z), \quad A^*,\ B^* \in C^1(\mathscr{V}).$$

显然求解问题 (3.9.1) 等价于求解下面的边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta w = f_1\big(A^*(w,z), B^*(w,z)\big) := g_1(w,z), & x \in \Omega, \\ -\Delta z = f_2\big(A^*(w,z), B^*(w,z)\big) := g_2(w,z), & x \in \Omega, \\ w = z = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9.2}$$

也可以把问题 (3.9.1) 转化成与其等价的偏微分方程与代数方程耦合的方程组的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta w + M_1 w = f_1(u,v) + M_1 A(u,v), & x \in \Omega, \\ -\Delta z + M_2 z = f_2(u,v) + M_2 B(u,v), & x \in \Omega, \\ u = A^*(w,z), \quad v = B^*(w,z), & x \in \Omega, \\ w = z = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.9.3}$$

其中 M_1, M_2 是待定的正常数.

对于问题 (3.9.2), 可以根据 $g_1(w,z)$ 和 $g_2(w,z)$ 的结构定义上下解. 但是一般来讲, $g_1(w,z)$ 和 $g_2(w,z)$ 的结构很复杂, 直接寻找问题 (3.9.2) 的上下解非常困难. 因而我们来讨论问题 (3.9.3).

问题 (3.9.3) 有 4 个未知函数 (u,v,w,z) 和 4 个方程. 形式上看问题变得更加复杂了, 实际上它比问题 (3.9.2) 容易处理. 我们仿照 3.7 节的方法定义上下解, 并由此得到解的存在性.

定义 3.9.1 假设函数 $\bar{u},\bar{v},\underline{u},\underline{v}\in C(\bar{\Omega})$, 函数 $\bar{w},\bar{z},\underline{w},\underline{z}\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 并且函数组 $(\bar{u},\bar{v})$ 和 $(\underline{u},\underline{v})$ 的值域属于 $\mathscr{U}$, 函数组 $(\bar{w},\bar{z})$ 和 $(\underline{w},\underline{z})$ 的值域属于 $\mathscr{V}$. 称 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{z})$ 和 $(\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{z})$ 为问题 (3.9.3) 的有序上下解, 如果 $\bar{u}\geqslant\underline{u}$, $\bar{v}\geqslant\underline{v}$, $\bar{w}\geqslant\underline{w}$, $\bar{z}\geqslant\underline{z}$, 并且满足

$$
\begin{aligned}
-\Delta\bar{w}+M_1\bar{w}&\geqslant f_1(u,v)+M_1A(u,v),\quad \forall\,(u,v)\in\langle\underline{u},\bar{u}\rangle\times\langle\underline{v},\bar{v}\rangle,\quad x\in\Omega,\\
-\Delta\bar{z}+M_2\bar{z}&\geqslant f_2(u,v)+M_2B(u,v),\quad \forall\,(u,v)\in\langle\underline{u},\bar{u}\rangle\times\langle\underline{v},\bar{v}\rangle,\quad x\in\Omega,\\
-\Delta\underline{w}+M_1\underline{w}&\leqslant f_1(u,v)+M_1A(u,v),\quad \forall\,(u,v)\in\langle\underline{u},\bar{u}\rangle\times\langle\underline{v},\bar{v}\rangle,\quad x\in\Omega,\\
-\Delta\underline{z}+M_2\underline{z}&\leqslant f_2(u,v)+M_2B(u,v),\quad \forall\,(u,v)\in\langle\underline{u},\bar{u}\rangle\times\langle\underline{v},\bar{v}\rangle,\quad x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}\geqslant A^*(w,z),\quad \bar{v}\geqslant B^*(w,z),\quad \forall\,(w,z)\in\langle\underline{w},\bar{w}\rangle\times\langle\underline{z},\bar{z}\rangle,\quad x\in\Omega,\\
&\underline{u}\leqslant A^*(w,z),\quad \underline{v}\leqslant B^*(w,z),\quad \forall\,(w,z)\in\langle\underline{w},\bar{w}\rangle\times\langle\underline{z},\bar{z}\rangle,\quad x\in\Omega,\\
&\underline{w}\leqslant 0\leqslant\bar{w},\quad \underline{z}\leqslant 0\leqslant\bar{z},\quad x\in\partial\Omega.
\end{aligned}
$$

仿照 3.7.1 节的过程, 利用不动点定理可以证明下面的定理.

定理 3.9.1 如果问题 (3.9.3) 存在有序上下解 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{z})$ 和 $(\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{z})$, 那么问题 (3.9.3) 在 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{z})$ 和 $(\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{z})$ 之间至少有一个解.

证明 对于 $(u,v,w,z)\in[C(\bar{\Omega})]^2\times[C^{\alpha}(\bar{\Omega})]^2$, 线性问题

$$
\begin{cases}
-\Delta\hat{w}+M_1\hat{w}=f_1(u,v)+M_1A(u,v), & x\in\Omega,\\
-\Delta\hat{z}+M_2\hat{z}=f_2(u,v)+M_2B(u,v), & x\in\Omega,\\
\hat{u}=A^*(w,z),\quad \hat{v}=B^*(w,z), & x\in\Omega,\\
\hat{w}=\hat{z}=0, & x\in\partial\Omega
\end{cases}
$$

存在唯一解 $(\hat{u},\hat{v},\hat{w},\hat{z})$. 由 $A^*(w,z)$ 和 $B^*(w,z)$ 的光滑性, $\hat{u},\hat{v}\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. 根据椭圆型方程的正则性理论, $\hat{w},\hat{z}\in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$. 定义算子 $T:T(u,v,w,z)=(\hat{u},\hat{v},\hat{w},\hat{z})$. 同于 3.7.1 节可证

$$
T:\ [C(\bar{\Omega})]^2\times[C^{\alpha}(\bar{\Omega})]^2\longrightarrow[C(\bar{\Omega})]^2\times[C^{\alpha}(\bar{\Omega})]^2
$$

是紧算子.

记

$$
\begin{aligned}
U=\big\{(u,v,w,z):\ &u,v\in C(\bar{\Omega}),\ w,z\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),\\
&(\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{z})\leqslant(u,v,w,z)\leqslant(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{z})\big\},
\end{aligned}
$$

现在证明 $T: U \longrightarrow U$. 对于任意的 $(u,v,w,z) \in U$, 因为 $\underline{w} \leqslant w \leqslant \bar{w}$, $\underline{z} \leqslant z \leqslant \bar{z}$, 按定义有

$$\underline{u} \leqslant A^*(w,z) = \hat{u} \leqslant \bar{u}, \quad \underline{v} \leqslant B^*(w,z) = \hat{v} \leqslant \bar{v}.$$

再证明 $\underline{w} \leqslant \hat{w} \leqslant \bar{w}$, $\underline{z} \leqslant \hat{z} \leqslant \bar{z}$. 我们只证 $\hat{w} \leqslant \bar{w}$, 其余的证明类似.

令 $\varphi = \bar{w} - \hat{w}$. 因为 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$, $\underline{v} \leqslant v \leqslant \bar{v}$, 根据定义易知, φ 满足

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + M_1\varphi \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ \varphi \geqslant 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

于是 $\varphi \geqslant 0$, 故 $\hat{w} \leqslant \bar{w}$.

再定义

$$\mathcal{O} = U \bigcap \{w, z \in C^\alpha(\bar{\Omega}) : |w,\ z|_\alpha \leqslant M\},$$

那么 $\mathcal{O}$ 是 $[C(\bar{\Omega})]^2 \times [C^\alpha(\bar{\Omega})]^2$ 中的有界闭凸集. 同于 3.7.1 节可证, 存在正常数 M 使得 $|\hat{w}, \hat{z}|_\alpha \leqslant M$ 对所有的 $(u,v,w,z) \in U$ 成立. 又因为 $T: U \longrightarrow U$ 是紧算子, 所以 $T: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ 是紧算子. 根据 Schauder 不动点定理 (定理 4.2.2), T 在 U 上有不动点 (u,v,w,z), 即存在 $(u,v,w,z) \in U$ 满足问题 (3.9.3). 证毕.

3.10 弱上下解方法

仿照弱解的定义和古典上下解的定义, 我们也可以定义弱上下解, 利用弱解的比较原理构造单调迭代序列, 进而得到弱解的存在性.

3.10.1 半线性方程

我们先讨论半线性方程, 仅以下面最简单形式的方程式的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.10.1}$$

为例来介绍弱上下解方法.

定义 3.10.1 函数 $u \in H^1(\Omega)$ 称为问题 (3.10.1) 的弱上解 (弱下解), 如果 $u|_{\partial\Omega} \geqslant (\leqslant) 0$, 并且对于任意 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$, 都有

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x \geqslant (\leqslant) \int_\Omega f(x,u)\varphi \mathrm{d}x.$$

定理 3.10.1 假设 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 分别是问题 (3.10.1) 的弱上解和弱下解, 并且 $\underline{u}, \bar{u} \in L^\infty(\Omega)$, $\underline{u} \leqslant \bar{u}$. 同上, 记

$$\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle = \{u \in L^\infty(\Omega) : \underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}\}.$$

又设对于任意的 $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, 函数 $f(x, u(x)) \in L^2(\Omega)$, 并且存在正常数 C 使得 $\|f(x, u(x))\|_2 \leqslant C$ 对所有的 $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ 成立. 同时存在正常数 M, 使得

$$f(x, u) - f(x, v) \geqslant -M(u - v), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \ \underline{u} \leqslant v \leqslant u \leqslant \bar{u}.$$

那么, 存在序列 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$, 满足

$$\underline{u}_m \nearrow, \quad \bar{u}_m \searrow, \quad \underline{u} \leqslant \underline{u}_m \leqslant \bar{u}_m \leqslant \bar{u}, \quad \forall\, m, \tag{3.10.2}$$

$$\underline{u}_m \longrightarrow \tilde{u}, \quad \bar{u}_m \longrightarrow \hat{u} \quad \text{当 } m \longrightarrow \infty \text{ 时}, \tag{3.10.3}$$

并且 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 是问题 (3.10.1) 位于 $\underline{u}$ 和 $\bar{u}$ 之间的最小解和最大解.

证明 对于任意给定的 $v \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + Mu = f(x, v) + Mv, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一解 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 记成 $u = Tv$. 定义 $\underline{u}_1 = T\underline{u}$, $\bar{u}_1 = T\bar{u}$.

先证明

$$\underline{u} \leqslant \underline{u}_1 \leqslant \bar{u}_1 \leqslant \bar{u}.$$

令 $v = \bar{u} - \bar{u}_1$. 因为 $\bar{u}, \bar{u}_1$ 满足 $\bar{u}|_{\partial\Omega} \geqslant 0 = \bar{u}_1|_{\partial\Omega}$ 和

$$\int_\Omega (\nabla\bar{u} \cdot \nabla\varphi + M\bar{u}\varphi)\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega \left[f(x, \bar{u}) + M\bar{u}\right]\varphi\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega), \ \varphi \geqslant 0,$$

$$\int_\Omega (\nabla\bar{u}_1 \cdot \nabla\varphi + M\bar{u}_1\varphi)\mathrm{d}x = \int_\Omega \left[f(x, \bar{u}) + M\bar{u}\right]\varphi\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega), \ \varphi \geqslant 0,$$

所以 v 满足 $v|_{\partial\Omega} \geqslant 0$ 和

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla\varphi + Mv\varphi)\mathrm{d}x \geqslant 0, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \geqslant 0.$$

由弱解的最大值原理知 $v \geqslant 0$, 即 $\bar{u}_1 \leqslant \bar{u}$. 同理可证 $\underline{u} \leqslant \underline{u}_1 \leqslant \bar{u}_1$.

定义 $\underline{u}_2 = T\underline{u}_1$, $\bar{u}_2 = T\bar{u}_1$. 同理可证

$$\underline{u}_1 \leqslant \underline{u}_2 \leqslant \bar{u}_2 \leqslant \bar{u}_1.$$

重复这种步骤, 定义

$$\underline{u}_{m+1} = T\underline{u}_m, \quad \bar{u}_{m+1} = T\bar{u}_m.$$

同上可以证明, 序列 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 满足式 (3.10.2).

由于 $\underline{u}_m, \bar{u}_m \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, 故

$$\|f(x, \underline{u}_m(x))\|_2 \leqslant C, \quad \|f(x, \bar{u}_m(x))\|_2 \leqslant C.$$

根据 L^2 理论,

$$\|\underline{u}_m\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_1, \quad \|\bar{u}_m\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_1,$$

其中常数 C_1 与 m 无关. 因为 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ 是紧的, 所以 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 都存在子序列, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中分别收敛到 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$. 又因为 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 都是单调有界的, 所以在点点的意义下它们都有极限. 利用极限的唯一性, 它们的极限分别是 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$. 因而式 (3.10.3) 成立. 注意到 $\underline{u}_{m+1} = T\underline{u}_m$ 和 $\bar{u}_{m+1} = T\bar{u}_m$ 的弱形式分别是

$$\int_\Omega (\nabla \underline{u}_{m+1} \cdot \nabla\varphi + M\underline{u}_{m+1}\varphi)\mathrm{d}x = \int_\Omega [f(x, \underline{u}_m) + M\underline{u}_m]\varphi\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

和

$$\int_\Omega (\nabla \bar{u}_{m+1} \cdot \nabla\varphi + M\bar{u}_{m+1}\varphi)\mathrm{d}x = \int_\Omega [f(x, \bar{u}_m) + M\bar{u}_m]\varphi\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

在上式中令 $m \longrightarrow \infty$ 便可推知, $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 都是问题 (3.10.1) 的弱解.

再证明 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 是问题 (3.10.1) 位于 $\underline{u}$ 和 $\bar{u}$ 之间的最小解和最大解. 假设 $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ 是问题 (3.10.1) 的解, 则 $u = Tu$. 同于 $\{\underline{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的单调性的证明可证, $\underline{u}_m \leqslant u \leqslant \bar{u}_m$ 对于所有的 m 都成立. 因此 $\tilde{u} \leqslant u \leqslant \hat{u}$. 定理得证.

在定理 3.10.1 中, 如果 $f(x, u)$ 关于 x, u 都属于 C^α, 那么上面得到的解还是古典解. 证明留作练习.

现在介绍构造弱上下解的具体方法. 在实际应用中, 我们不可能构造出“太弱”的上下解. 一个比较切实可行的方法是构造分片光滑的弱上下解. 下面仅以弱上解为例来说明这一点.

假设开集 $D \subset\subset \Omega$, 函数

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^2(D) \cap C^1(\bar{D}) \cap C^2(\Omega \setminus \bar{D}) \cap C^1(\Omega \setminus D) \cap C(\Omega), \tag{3.10.4}$$

但是 Du 在 ∂D 上间断. 假设在古典的意义下, u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u \geqslant f(x, u), & x \in D, \\ -\Delta u \geqslant f(x, u), & x \in \Omega \setminus D, \\ u \geqslant 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10.5}$$

分别用 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu^+}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu^-}$ 表示 u 在 ∂D 上的外法向导数和内法向导数. 对于任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$, 用 φ 乘以问题 (3.10.5) 的方程并分别在 D 和 $\Omega \setminus D$ 上积分得

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla\varphi\mathrm{d}x - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu^+}\varphi\mathrm{d}S \geqslant \int_D f(x, u)\varphi\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\Omega\setminus D} \nabla u\cdot\nabla\varphi \mathrm{d}x - \int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\nu^-}\varphi\mathrm{d}S \geqslant \int_{\Omega\setminus D} f(x,u)\varphi\mathrm{d}x.$$

两式相加得,

$$\int_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla\varphi \mathrm{d}x - \int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu^+}+\frac{\partial u}{\partial\nu^-}\right)\varphi\mathrm{d}S \geqslant \int_{\Omega} f(x,u)\varphi\mathrm{d}x,\quad \forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega),\ \varphi\geqslant 0.$$

由此知, 如果

$$\int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu^+}+\frac{\partial u}{\partial\nu^-}\right)\varphi\mathrm{d}S \geqslant 0,\quad \forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega),\quad \varphi\geqslant 0, \tag{3.10.6}$$

那么 u 是问题 (3.10.1) 的弱上解. 不等式 (3.10.6) 成立的一个充分必要条件是

$$\frac{\partial u}{\partial\nu^+}+\frac{\partial u}{\partial\nu^-}\geqslant 0\ \ 在\ \partial D\ 上成立. \tag{3.10.7}$$

定理 3.10.2 *如果函数 u 满足条件 (3.10.4) 和不等式 (3.10.5) 与不等式 (3.10.7) 那么它是问题 (3.10.1) 的一个弱上解.*

对于弱下解, 我们有类似的充分条件.

利用定理 3.10.2 可以证明, 如果 $\bar u_1$ 和 $\bar u_2$ 都是问题 (3.10.1) 的古典上解, 那么函数 $\bar u(x)=\min\left\{\bar u_1(x),\,\bar u_2(x)\right\}$ 是问题 (3.10.1) 的弱上解. 如果 $\underline{u}_1$ 和 $\underline{u}_2$ 都是问题 (3.10.1) 的古典下解, 那么函数 $\underline{u}(x)=\max\left\{\underline{u}_1(x),\,\underline{u}_2(x)\right\}$ 是问题 (3.10.1) 的弱下解.

3.10.2 拟线性方程

在 3.3.1 节, 我们讨论了拟线性问题 (3.3.3) 的古典上下解方法. 本小节讨论拟线性方程的边值问题的弱上下解方法. 这部分内容参考了文献 [2].

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, $\mathcal{A}$ 是散度型二阶拟线性椭圆算子

$$(\mathcal{A}u)(x)=\sum_{i=1}^n D_i\big(A_i(x,u(x),Du(x))\big),\quad \text{a.e. } x\in\Omega, \tag{3.10.8}$$

其中 A_i $(i=1,\cdots,n)$ 满足下面的条件:

(A1) $A_i:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件: 对于任意固定的 $(u,\eta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $A_i(x,u,\eta)$ 关于 $x\in\Omega$ 可测, 对几乎所有的 $x\in\Omega$, 关于 (u,η) 连续;

(A2) 存在常数 $p\in(1,\infty)$, $c_0\geqslant 0$ 和非负函数 $h_0\in L^{p'}(\Omega)$, 其中 $p'=p/(p-1)$, 对几乎所有的 $x\in\Omega$ 和所有的 $(u,\eta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, 有

$$|A_i(x,u,\eta)|\leqslant h_0(x)+c_0(|u|^{p-1}+|\eta|^{p-1}),\quad i=1,\cdots,n;$$

(A3) 对几乎所有的 $x\in\Omega$, 以及任意的 $u\in\mathbb{R}$, $\eta,\eta'\in\mathbb{R}^n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n}\big(A_i(x,u,\eta)-A_i(x,u,\eta')\big)(\eta_i-\eta_i')\geqslant 0;$$

(A4) 存在常数 $\alpha>0$ 和函数 $h_1\in L^{p'}(\Omega)$, 对几乎所有的 $x\in\Omega$ 和所有的 $(u,\eta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n}A_i(x,u,\eta)\eta_i\geqslant\alpha|\eta|^p-h_1(x).$$

对于散度型线性算子

$$\mathcal{A}u=\sum_{i,j=1}^{n}D_i(a_{ij}(x)D_ju),$$

如果 $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$ 并且

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)y_iy_j\geqslant\alpha|y|^2,\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^n,\quad \text{a.e. } x\in\Omega,$$

那么条件 (A1) ~ (A4) 成立. 此时, $A_i(x,u,Du)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)D_ju$, $p=2$.

利用条件 (A1) 和 (A2) 易知, 半线性形式

$$a(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega A_i(x,u,Du)D_iv\mathrm{d}x$$

在 $W^{1,p}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)$ 上有定义.

考虑边值问题

$$\begin{cases}-\mathcal{A}u+B(x,u,Du)=f(x), & x\in\Omega,\\ u=g, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3.10.9}$$

其中算子 $\mathcal{A}$ 由式 (3.10.8) 定义, B 是一个 Carathéodory 函数 (即满足 Carathéodory 条件的函数), $g\in W^{1,p}(\Omega)$, $f\in W^{-1,p'}(\Omega):=(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, 后者是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的对偶空间. 这里, $u|_{\partial\Omega}=g$ 是指 $(u-g)(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

函数 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 称为问题 (3.10.9) 的弱解, 如果 $u|_{\partial\Omega}=g$, $B(\cdot,u(\cdot),Du(\cdot))\in L^{p'}(\Omega)$, 并且成立

$$a(u,v)+\int_\Omega B(x,u,Du)v\mathrm{d}x=(f,v),\quad\forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

这里, (f,v) 表示 $W^{-1,p'}(\Omega)$ 与 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 之间的对偶积.

定义 3.10.2　函数 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 被称为问题 (3.10.9) 的一个弱上解, 如果

$$u|_{\partial\Omega}\geqslant g,\quad B(\cdot,u(\cdot),Du(\cdot))\in L^{p'}(\Omega),$$

$$a(u,v)+\int_\Omega B(x,u,Du)v\mathrm{d}x\geqslant(f,v),\quad\forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega),\quad v\geqslant 0 \text{ a.e. 于 } \Omega,$$

这里 $u|_{\partial\Omega}\geqslant g$ 是指 $(g-u)^+:=\max\{g-u,0\}\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

如果上面的所有反向不等式都成立 (检验函数 $v\geqslant 0$ 除外), 则称 u 是问题 (3.10.9) 的一个弱下解.

下面建立的弱上下解方法的理论根据是变分不等问题, 而变分不等问题解的存在性的抽象工具是单调算子理论. 设 V 是自反的 Banach 空间, 其共轭空间记为 V^*. 对于 $u\in V$ 和 $f\in V^*$, 记 $\langle f,u\rangle$ 为 u 与 f 的对偶积. 称算子 $\mathcal{A}:V\longrightarrow V^*$ 是伪单调的, 如果由

$$\text{在 } V \text{ 中 } u_k\rightharpoonup u,\quad \limsup_{k\to\infty}\langle\mathcal{A}u_k,u_k-u\rangle\leqslant 0,$$

就一定可以推出

$$\langle\mathcal{A}u,u-v\rangle\leqslant\liminf_{k\to\infty}\langle\mathcal{A}u_k,u_k-v\rangle,\quad\forall\, v\in V.$$

称算子 $\mathcal{A}:V\longrightarrow V^*$ 是有界的, 如果它把 V 中的有界集映为 V^* 中的有界集.

定理 3.10.3 ([15, 定理 2.3]) 设 V 是可分的自反 Banach 空间, K 是 V 中的非空闭凸集, $\mathcal{A}:V\longrightarrow V^*$ 是有界的伪单调算子, $f\in V^*$. 如果存在 $u_0\in K$ 和常数 $\rho>0$, 使得

$$\langle\mathcal{A}u,u-u_0\rangle>\langle f,u-u_0\rangle,\quad\forall\, u\in K,\ \|u\|\geqslant\rho, \tag{3.10.10}$$

那么变分不等问题

$$u\in K:\ \langle\mathcal{A}u,v-u\rangle\geqslant\langle f,v-u\rangle,\quad\forall\, v\in K \tag{3.10.11}$$

有解.

若在 (3.10.11) 中取 $K=V$, 那么 u 是问题 (3.10.11) 的解当且仅当 $\mathcal{A}u=f$. 此外, 如果 $\mathcal{A}$ 是强制的, 即

$$\lim_{\|v\|\to\infty}\frac{\langle\mathcal{A}v,v\rangle}{\|v\|}=\infty,$$

那么条件 (3.10.10) 对于 $K=V$ 自然成立.

定理 3.10.4 假设 $v,w\in W^{1,p}(\Omega)$ 分别是问题 (3.10.9) 的弱下解和弱上解, $v\leqslant w$, 并且可以把 $g(x)$ 适当延拓到 Ω, 使得在 Ω 内几乎处处有 $v\leqslant g\leqslant w$. 又设存在常数 $c_1>0$ 和函数 $h_2\in L^{p'}(\Omega)$, 使得

$$|B(x,u,\eta)|\leqslant h_2(x)+c_1|\eta|^{p-1},\quad\text{a.e. } x\in\Omega,\quad\forall\,\eta\in\mathbb{R}^n,\ u\in\langle v,\,w\rangle. \tag{3.10.12}$$

那么问题 (3.10.9) 至少有一个弱解 u, 并且 $v\leqslant u\leqslant w$ 在 Ω 内几乎处处成立.

证明 我们首先通过修正系数函数在区间 $\langle v, w\rangle$ 外部的值, 建立一个与问题 (3.10.9) 和给定的函数 v, w 相关联的修正的边值问题, 而后证明该边值问题有一个弱解并且位于 v 和 w 之间, 从而得到问题 (3.10.9) 的解. 把证明过程分成下面的几步来进行.

第一步 构造修正问题.

对于 $i=1,\cdots,n$, $x\in\Omega$ 和 $(u,\eta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, 令

$$A_i^*(x,u,\eta)=\begin{cases} A_i(x,v(x),\eta) & 若\ u<v(x),\\ A_i(x,u,\eta) & 若\ v(x)\leqslant u\leqslant w(x),\\ A_i(x,w(x),\eta) & 若\ u>w(x).\end{cases}$$

容易验证, A_i^* 仍然满足条件 (A1) $\sim$ (A4).

定义截断映射 $T: W^{1,p}(\Omega)\longrightarrow W^{1,p}(\Omega)$:

$$(Tu)(x)=\begin{cases} v(x)-g(x) & 若\ u(x)<v(x)-g(x),\\ u(x) & 若\ v(x)-g(x)\leqslant u(x)\leqslant w(x)-g(x),\\ w(x)-g(x) & 若\ u(x)>w(x)-g(x),\end{cases}$$

及修正函数

$$A_i'(x,u,\eta)=A_i^*(x,u+g(x),\eta+Dg(x)),$$

$$B'(x,u,\eta)=B(x,u+g(x),\eta+Dg(x)),$$

$$(\mathcal{A}'u)(x)=\sum_{i=1}^n D_i\big(A_i'(x,u(x),Du(x))\big).$$

再定义函数 $\gamma:\ \Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$\gamma(x,u)=\begin{cases} -\big[v(x)-g(x)-u\big]^{p-1} & 若\ u<v(x)-g(x),\\ \ 0 & 若\ v(x)-g(x)\leqslant u\leqslant w(x)-g(x),\\ \big[u-w(x)+g(x)\big]^{p-1} & 若\ u>w(x)-g(x).\end{cases}$$

考察下面的辅助问题:

$$\begin{cases} -\mathcal{A}'u+B'(x,Tu,D(Tu))+\beta\gamma(x,u)=f(x), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3.10.13}$$

其中 β 是待定的正常数. 我们首先利用抽象定理 (定理 3.10.3) 证明问题 (3.10.13) 有一个弱解 u_0, 其次证明 u_0+g 满足 $v\leqslant u_0+g\leqslant w$, 进而有

$$\mathcal{A}'u_0=\mathcal{A}(u_0+g),\quad Tu_0=u_0,\quad \gamma(x,u_0)=0,$$

$$B'(x,Tu_0,D(Tu_0))=B(x,u_0+g,D(u_0+g)).$$

这说明 u_0+g 是原问题 (3.10.9) 的一个弱解.

第二步 与问题 (3.10.13) 对应的半线性形式是

$$b(u,\phi)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}A_i'(x,u,Du)D_i\phi\mathrm{d}x+\int_{\Omega}B'(x,Tu,D(Tu))\phi\mathrm{d}x$$

$$+\beta\int_{\Omega}\gamma(x,u)\phi\mathrm{d}x,\quad u,\quad \phi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

注意到 $B(\cdot,v(\cdot),Dv(\cdot)),\ B(\cdot,w(\cdot),Dw(\cdot))\in L^{p'}(\Omega)$, 根据 A_i', B', T 和 γ 的定义以及条件 (A2) 和 (3.10.12) 容易验证, 对于任意的 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$A_i'(\cdot,u,Du),\ B'(\cdot,Tu,D(Tu)),\ \gamma(\cdot,u)\in L^{p'}(\Omega),$$

其中 $p'=p/(p-1)$. 所以 $b(u,\cdot)$ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上的有界线性泛函, 故存在唯一的 $\mathcal{F}u\in W^{-1,p'}(\Omega)$, 使得

$$b(u,\phi)=(\mathcal{F}u,\phi),\ \ \forall\ \phi\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

这样就得到算子 $\mathcal{F}:W_0^{1,p}(\Omega)\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$.

容易验证: 对于任意给定的正常数 C, 存在正常数 C_1, 当 $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leqslant C$ 时, $|b(u,\phi)|\leqslant C_1\|\phi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ 对所有 $\phi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 成立. 这说明 $\mathcal{F}$ 是有界算子.

为了证明 $\mathcal{F}$ 是伪单调算子, 我们分解

$$b(u,\phi)=b_1(u,\phi)+b_2(u,\phi),$$

其中

$$b_1(u,\phi)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}A_i'(x,u,Du)D_i\phi\mathrm{d}x,$$

$$b_2(u,\phi)=\int_{\Omega}B'(x,Tu,D(Tu))\phi\mathrm{d}x+\beta\int_{\Omega}\gamma(x,u)\phi\mathrm{d}x.$$

这样, 由

$$b_1(u,\phi)=(\mathcal{F}_1u,\phi),\ \ \forall\ \phi\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

就定义了一个算子 $\mathcal{F}_1:W_0^{1,p}(\Omega)\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$.

第三步 证明 $\mathcal{F}_1$ 是伪单调算子.

假设在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_m\rightharpoonup u$,

$$\limsup_{m\to\infty}(\mathcal{F}_1u_m,u_m-u)\leqslant 0. \tag{3.10.14}$$

利用条件 (A3) 得

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}_1 u_m - \mathcal{F}_1 u, u_m - u)\\
=&\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du_m) - A_i'(x,u,Du)\right] D_i(u_m-u)\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du_m) - A_i'(x,u_m,Du)\right] D_i(u_m-u)\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du) - A_i'(x,u,Du)\right] D_i(u_m-u)\mathrm{d}x \qquad (3.10.15)\\
\geqslant&\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du) - A_i'(x,u,Du)\right] D_i(u_m-u)\mathrm{d}x. \qquad (3.10.16)
\end{aligned}
$$

定义 $f_i(x,z) = A_i'(x,z,Du(x))$, 容易看出 f_i 是 Carathéodory 函数. 由于 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 利用条件 (A2) 知, $f_i(x,\cdot) : L^p(\Omega) \longrightarrow L^{p'}(\Omega)$. 因此算子 F_i : $F_i(z) = f_i(x,z)$ 是 $L^p(\Omega)$ 到 $L^{p'}(\Omega)$ 的连续算子 ([16, 第 1 章定理 1.1]). 因为在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u$, 所以在 $L^{p'}(\Omega)$ 中 $F_i(u_m) \longrightarrow F_i(u)$, 即 $f_i(x,u_m) \longrightarrow f_i(x,u)$, 亦即

$$\lim_{m\to\infty} \|A_i'(x,u_m,Du) - A_i'(x,u,Du)\|_{L^{p'}(\Omega)} = 0.$$

又因为 $\|D_i(u_m-u)\|_{L^p(\Omega)}$ 有界, 故有

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \left[A_i'(x,u_m,Du) - A_i'(x,u,Du)\right] D_i(u_m-u) \right| \mathrm{d}x = 0. \qquad (3.10.17)$$

此式结合式 (3.10.16) 推出

$$\liminf_{m\to\infty} (\mathcal{F}_1 u_m - \mathcal{F}_1 u, u_m - u) \geqslant 0. \qquad (3.10.18)$$

另一方面, 当 $m \longrightarrow \infty$ 时, $(\mathcal{F}_1 u, u_m - u) \longrightarrow 0$. 由式 (3.10.14) 得

$$\limsup_{m\to\infty} (\mathcal{F}_1 u_m - \mathcal{F}_1 u, u_m - u) = \limsup_{m\to\infty} (\mathcal{F}_1 u_m, u_m - u) \leqslant 0.$$

此式结合式 (3.10.18) 推得

$$\lim_{m\to\infty} (\mathcal{F}_1 u_m - \mathcal{F}_1 u, u_m - u) = 0.$$

再利用式 (3.10.15) 和式 (3.10.17) 知

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du_m) - A_i'(x,u_m,Du)\right] D_i(u_m-u)\mathrm{d}x = 0. \qquad (3.10.19)$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u_m,Du_m)D_i(u_m-u)\Big| \\
\leqslant &\sum_{i=1}^{n}\big[A_i'(x,u_m,Du_m)-A_i'(x,u_m,Du)\big]D_i(u_m-u) \\
&+\Big|\sum_{i=1}^{n}\big[A_i'(x,u_m,Du)-A_i'(x,u,Du)\big]D_i(u_m-u)\Big| \\
&+\Big|\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u,Du)D_i(u_m-u)\Big|,
\end{aligned}
$$

根据极限 (3.10.17) 和极限 (3.10.19) 以及在 $L^p(\Omega)$ 中 $Du_m \rightharpoonup Du$, 得

$$
\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega}\Big|\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u_m,Du_m)D_i(u_m-u)\Big|\mathrm{d}x=0. \tag{3.10.20}
$$

分别利用条件 (A4) 和 (A2) 知, 对于任意的 $\Omega_0\subset\Omega$, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u_m,Du_m)D_i(u_m-u)\mathrm{d}x \\
=&\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u_m,Du_m)D_iu_m\mathrm{d}x-\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u_m,Du_m)D_iu\mathrm{d}x \\
\geqslant&\alpha\int_{\Omega_0}|Du_m|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega_0}h_1(x)\mathrm{d}x-\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u_m,Du_m)D_iu\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n} A_i'(x,u_m,Du_m)D_iu\mathrm{d}x \\
\leqslant&\int_{\Omega_0}h_0(x)|Du|\mathrm{d}x+c_0\int_{\Omega_0}|u_m|^{p-1}|Du|\mathrm{d}x+c_0|Du_m|^{p-1}|Du|\mathrm{d}x \\
\leqslant&\|h_0\|_{L^{p'}(\Omega_0)}\|Du\|_{L^p(\Omega_0)}+c_0\|u_m\|^{p-1}_{L^p(\Omega_0)}\|Du\|_{L^p(\Omega_0)} \\
&+c_0\|Du_m\|^{p-1}_{L^p(\Omega_0)}\|Du\|_{L^p(\Omega_0)} \\
\leqslant&C\|Du\|_{L^p(\Omega_0)}.
\end{aligned}
$$

由此以及极限 (3.10.20) 推知

$$\lim_{|\Omega_0|\to 0}\int_{\Omega_0}|Du_m|^p\mathrm{d}x=0 \tag{3.10.21}$$

关于 m 一致成立.

下面证明在 $L^p(\Omega)$ 中 $Du_m\longrightarrow Du$. 用反证法. 假设存在 $\varepsilon>0$, 和 $\{Du_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的子列仍记为它自身, 使得

$$\int_\Omega|Du_m-Du|^p\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon,\quad \forall\, m\geqslant 1.$$

我们断言, 一定存在 $\tau>0$ 和 $\Omega_\tau\subset\Omega$, 满足

$$|\Omega_\tau|\geqslant\tau,\ \ 在\ \Omega_\tau\ 上\ |Du_m-Du|\geqslant\tau,\quad \forall\, m\geqslant 1. \tag{3.10.22}$$

如果该断言不成立, 那么对于任意的 k, 存在 m_k, 使得集合

$$\Omega_m^k:=\{x\in\Omega:\,|Du_{m_k}-Du|\geqslant 1/k\}$$

的测度 $|\Omega_m^k|<1/k$. 再利用极限 (3.10.21) 推知, 当 $k\longrightarrow\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\int_\Omega|Du_{m_k}-Du|^p\mathrm{d}x&=\int_{\Omega_m^k}|Du_{m_k}-Du|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega\setminus\Omega_m^k}|Du_{m_k}-Du|^p\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\Omega_m^k}|Du_{m_k}-Du|^p\mathrm{d}x+\frac{|\Omega|}{k^p}\\&\leqslant C\int_{\Omega_m^k}|Du_{m_k}|^p\mathrm{d}x+C\int_{\Omega_m^k}|Du|^p\mathrm{d}x+\frac{|\Omega|}{k^p}\\&\to 0.\end{aligned}$$

我们得到一个矛盾. 于是断言 (3.10.22) 成立.

按照如下方式定义向量值函数 $\boldsymbol{\psi}(x)=\big(\psi_1(x),\cdots,\psi_n(x)\big)$:

$$\psi_i(x)=0,\quad \forall\, x\in\Omega\setminus\Omega_\tau,$$

$$\psi_i(x)=\begin{cases}1, & x\in\bar\Omega_\tau,\ D_iu_m-D_iu>0,\\ -1, & x\in\bar\Omega_\tau,\ D_iu_m-D_iu<0.\end{cases}$$

显然 $\boldsymbol{\psi}\in\big[L^{p'}(\Omega)\big]^n$, 并且

$$\int_\Omega\boldsymbol{\psi}\cdot(Du_m-Du)\mathrm{d}x=\int_{\Omega_\tau}|Du_m-Du|\mathrm{d}x\geqslant\tau^2.$$

此与在 $L^p(\Omega)$ 中 $Du_m\rightharpoonup Du$ 的事实相矛盾. 故在 $L^p(\Omega)$ 中 $Du_m\longrightarrow Du$, 因而在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_m\longrightarrow u$.

对任意的 $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 利用条件 (A3) 得

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}_1 u_m, u_m - v)\\
=&\int_\Omega \sum_{i=1}^n A_i'(x,u_m,Du_m)D_i(u_m-v)\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du_m)-A_i'(x,u_m,Du)\right]D_i(u_m-u)\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du)D_i(u_m-u)+A_i'(x,u_m,Du_m)D_i(u-v)\right]\mathrm{d}x\\
\geqslant&\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du)D_i(u_m-u)+A_i'(x,u_m,Du_m)D_i(u-v)\right]\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du)-A_i'(x,u,Du)\right]D_i(u_m-u)\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[A_i'(x,u_m,Du_m)-A_i'(x,u,Du)\right]D_i(u-v)\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega \sum_{i=1}^n A_i'(x,u,Du)D_i(u_m-u)\mathrm{d}x+\int_\Omega \sum_{i=1}^n A_i'(x,u,Du)D_i(u-v)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由极限 (3.10.17) 知, 当 $m\longrightarrow\infty$ 时上式右端的第一项趋于零. 由于在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_m\longrightarrow u$, 显然上式右端的第三项趋于零. 因为 Du_m 几乎处处收敛于 Du, 同于式 (3.10.17) 的证明, 当 $m\longrightarrow\infty$ 时上式右端的第二项趋于零. 故由上式得

$$
(\mathcal{F}_1 u, u-v)=\int_\Omega \sum_{i=1}^n A_i'(x,u,Du)D_i(u-v)\mathrm{d}x\leqslant \liminf_{m\to\infty}(\mathcal{F}_1 u_m, u_m-v),
$$

这说明 $\mathcal{F}_1$ 是伪单调算子.

第四步 证明 $\mathcal{F}$ 是伪单调算子.

假设在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_k\longrightarrow u$, $\limsup\limits_{k\to\infty}(\mathcal{F}u_k, u_k-u)\leqslant 0$, 即 $\limsup\limits_{k\to\infty} b(u_k,u_k-u)\leqslant 0$. 欲证

$$
b(u,u-v)\leqslant \liminf_{k\to\infty} b(u_k,u_k-v),\quad \forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.10.23}
$$

事实上, 由于 $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界, 所以 $\{Tu_k\}_{k=1}^\infty$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中也有界, 并且在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_k\longrightarrow u$ (因为 $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ 是紧的), 因此 $\{B'(\cdot,Tu_k, D(Tu_k))\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{\gamma(\cdot,u_k)\}_{k=1}^\infty$ 在 $L^{p'}(\Omega)$ 中都有界. 由此推出

$$
\lim_{k\to\infty} b_2(u_k,u_k-u)=0,
$$

故有

$$\limsup_{k\to\infty} b_1(u_k, u_k - u) \leqslant 0, \quad \text{即} \quad \limsup_{k\to\infty} (\mathcal{F}_1 u_k, u_k - u) \leqslant 0.$$

由于 $\mathcal{F}_1$ 是伪单调算子, 所以

$$\begin{aligned} b_1(u, u - v) &= (\mathcal{F}_1 u, u - v) \leqslant \liminf_{k\to\infty} (\mathcal{F}_1 u_k, u_k - v) \\ &= \liminf_{k\to\infty} b_1(u_k, u_k - v), \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.10.24}$$

此外, 同上可证在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_k \longrightarrow u$ (同于在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u$ 的证明过程). 因此

$$\text{在 } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ 中 } Tu_k \longrightarrow Tu. \tag{3.10.25}$$

由此推出

$$\lim_{k\to\infty} b_2(u_k, u_k - v) = b_2(u, u - v), \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.10.26}$$

再由式 (3.10.24) 知式 (3.10.23) 成立, 所以 $\mathcal{F}$ 是伪单调算子.

第五步　证明存在常数 $\tau > 0$, 使得

$$\int_\Omega \gamma(x, u) u \mathrm{d}x \geqslant \tau \|u\|_p^p - C_3 \|u\|_p. \tag{3.10.27}$$

定义

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega : u(x) < v(x) - g(x)\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in \Omega : v(x) - g(x) \leqslant u(x) \leqslant w(x) - g(x)\}, \\ \Omega_3 &= \{x \in \Omega : u(x) > w(x) - g(x)\}. \end{aligned}$$

按照 $\gamma(x, u)$ 的定义知,

$$\int_\Omega \gamma(x, u) u \mathrm{d}x = \int_{\Omega_1} \gamma(x, u) u \mathrm{d}x + \int_{\Omega_3} \gamma(x, u) u \mathrm{d}x.$$

由于在 Ω_1 上 $u(x) < v(x) - g(x) \leqslant 0$, 故存在仅依赖于 p 的正常数 α 和 β, 使得对所有 $x \in \Omega_1$, 有

$$\big|u(x) - [v(x) - g(x)]\big|^{p-1} \geqslant \alpha |u(x)|^{p-1} - \beta |v(x) - g(x)|^{p-1}.$$

因为 $v, g \in L^p(\Omega)$, 所以存在仅依赖于 p 以及 v 和 g 的 L^p 范数的正常数 C', 使得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \gamma(x, u) u \mathrm{d}x &= \int_{\Omega_1} \big|u(x) - [v(x) - g(x)]\big|^{p-1} |u| \mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{\Omega_1} \left(\alpha |u(x)|^{p-1} - \beta |v(x) - g(x)|^{p-1}\right) |u| \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$=\alpha\int_{\Omega_1}|u(x)|^p\mathrm{d}x-\beta\int_{\Omega_1}|v(x)-g(x)|^{p-1}|u|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\alpha\int_{\Omega_1}|u(x)|^p\mathrm{d}x-C'\left(\int_{\Omega_1}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

同理, 存在仅依赖于 p 以及 w 和 g 的 L^p 范数的正常数 α' 和 C^*, 使得

$$\int_{\Omega_3}\gamma(x,u)u\mathrm{d}x\geqslant\alpha'\int_{\Omega_3}|u(x)|^p\mathrm{d}x-C^*\left(\int_{\Omega_3}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

由于 $v,w,g\in L^p(\Omega)$, 故存在正常数 $\hat{C}$, 使得 $\|u\|_{L^p(\Omega_2)}\leqslant\hat{C}$. 取 $\tau=\min\{\alpha,\alpha'\}$, 利用上面得到的估计, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\gamma(x,u)u\mathrm{d}x\geqslant&\,\tau\left(\int_{\Omega_1}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega_2}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega_3}|u|^p\mathrm{d}x\right)-\tau\int_{\Omega_2}|u|^p\mathrm{d}x\\&-C'\left(\int_{\Omega_1}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}-C^*\left(\int_{\Omega_3}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\\geqslant&\,\tau\|u\|^p_{L^p(\Omega)}-\tau\left(\int_{\Omega_2}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\Omega_2}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\&-(C'+C^*)\|u\|_{L^p(\Omega)}\\\geqslant&\,\tau\|u\|^p_{L^p(\Omega)}-\tau\hat{C}^{p-1}\|u\|_{L^p(\Omega_2)}-(C'+C^*)\|u\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

再取 $C_3=\tau\hat{C}^{p-1}+C'+C^*$, 即得估计式 (3.10.27).

第六步 证明 $\mathcal{F}$ 是强制的.

由条件 (A4) 知

$$\sum_{i=1}^n\int_{\Omega}A_i'(x,u,Du)D_iu\mathrm{d}x\geqslant\alpha\|Du\|_p^p-C_4.$$

注意到 $B(\cdot,v(\cdot),Dv(\cdot)),\ B(\cdot,w(\cdot),Dw(\cdot))\in L^{p'}(\Omega)$, 利用式 (3.10.12) 和 B' 的定义得

$$\left|\int_{\Omega}B'(x,u,Du)u\mathrm{d}x\right|\leqslant C_5\|u\|_p+C_6\|Du\|_p^{p-1}\|u\|_p.$$

根据 Young 不等式, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 有

$$\|Du\|_p^{p-1}\|u\|_p\leqslant\frac{\varepsilon^{p'}}{p'}\|Du\|_p^p+\frac{\varepsilon^{-p}}{p}\|u\|_p^p.$$

若取 $\varepsilon>0$ 适当小, $\beta>0$ 适当大, 则有

$$b(u,u)\geqslant\frac{\alpha}{2}\|Du\|_p^p-C_7\|u\|_p-C_8,\quad\forall\,u\in W_0^{1,p}(\Omega).\tag{3.10.28}$$

因为在空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中, 范数 $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ 与 $\|Du\|_p$ 等价, 并且 $p>1$, 那么由不等式 (3.10.28) 知 $\mathcal{F}$ 是强制的.

第七步 对于 $K=V=W_0^{1,p}(\Omega)$, 应用定理 3.10.3 知, 问题

$$\begin{cases} -\mathcal{A}'u+B'(x,Tu,D(Tu))+\beta\gamma(x,u)=f(x), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

存在弱解 $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

第八步 令 $v_0=u_0+g$. 如果能够证明 $v\leqslant v_0\leqslant w$, 则有

$$\mathcal{A}'u_0=\mathcal{A}v_0,\quad Tu_0=u_0,\quad B'(x,Tu_0,D(Tu_0))=B(x,v_0,Dv_0),\quad \gamma(x,u_0)=0,$$

从而 v_0 是原问题 (3.10.9) 的弱解.

现在证明 $v\leqslant v_0\leqslant w$. 按照定义, v_0 满足

$$\sum_{i=1}^n\int_\Omega A_i^*(x,v_0,Dv_0)D_i\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega B\big(x,Tu_0+g,D(Tv_0)\big)\phi\mathrm{d}x \\ +\beta\int_\Omega\gamma(x,v_0-g)\phi\mathrm{d}x=\int_\Omega f\phi\mathrm{d}x,\quad \forall\ \phi\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.10.29}$$

因为 $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $w|_{\partial\Omega}\geqslant g|_{\partial\Omega}$, 所以 $(v_0-w)^+\in W_0^{1,p}(\Omega)$. 对于 $\phi=(v_0-w)^+$, 我们有

$$\int_\Omega\gamma(x,v_0-g)\phi\mathrm{d}x=\int_\Omega\big[(v_0-w)^+\big]^p\mathrm{d}x=\|(v_0-w)^+\|_p^p,$$
$$\int_\Omega B(x,Tu_0+g,D(Tv_0))\phi=\int_\Omega B(x,w,Dw)(v_0-w)^+\mathrm{d}x.$$

利用条件 (A3),

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n\int_\Omega A_i^*(x,v_0,Dv_0)D_i\phi\mathrm{d}x\\ =&\sum_{i=1}^n\int_\Omega A_i(x,w,Dv_0)D_i(v_0-w)^+\mathrm{d}x\\ =&\sum_{i=1}^n\int_\Omega A_i(x,w,Dw)D_i(v_0-w)^+\mathrm{d}x\\ &+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\big[A_i(x,w,Dv_0)-A_i(x,w,Dw)\big]D_i(v_0-w)^+\mathrm{d}x\\ \geqslant&\sum_{i=1}^n\int_\Omega A_i(x,w,Dw)D_i(v_0-w)^+\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是由式 (3.10.29) 得

$$\int_\Omega f(x)(v_0-w)^+\mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^n \int_\Omega A_i(x,w,Dw)D_i(v_0-w)^+\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega B(x,w,Dw)(v_0-w)^+\mathrm{d}x + \beta\|(v_0-w)^+\|_p^p.$$

因为 w 是问题 (3.10.9) 的弱上解, 并且 $(v_0-w)^+\geqslant 0$, 按定义有

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega A_i(x,w,Dw)D_i(v_0-w)^+\mathrm{d}x + \int_\Omega B(x,w,Dw)(v_0-w)^+\mathrm{d}x \\ \geqslant \int_\Omega f(x)(v_0-w)^+\mathrm{d}x.$$

由此推出

$$\int_\Omega f(x)(v_0-w)^+\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega f(x)(v_0-w)^+\mathrm{d}x + \beta\|(v_0-w)^+\|_p^p,$$

进而得到 $\beta\|(v_0-w)^+\|_p^p\leqslant 0$, 故有 $(v_0-w)^+\equiv 0$, 即 $v_0\leqslant w$.

类似地可以证明, $v_0\geqslant v$. 定理得证.

当 $A_i(x,u,\eta)=A_i(x,\eta)$ 不依赖于 u 时, 还可以得到更好的结论.

定理 3.10.5 ([2, 第四章引理 4.10]) **假设条件 (A1) ~ (A4) 成立, 并且 $A_i(x,u,\eta)=A_i(x,\eta)$ 不依赖于 u. 如果 v_1, v_2 是问题 (3.10.9) 的弱下解, 那么 $\max\{v_1,v_2\}$ 也是问题 (3.10.9) 的弱下解. 类似地, 如果 w_1,w_2 问题 (3.10.9) 的弱上解, 那么 $\min\{w_1,w_2\}$ 也是问题 (3.10.9) 的弱上解.**

定理 3.10.6 ([2, 第四章定理 4.11]) **假设定理 3.10.4 的条件成立, 并且 $A_i(x,u,\eta)=A_i(x,\eta)$ 不依赖于 u. 那么在区间 $\langle v,w\rangle$ 内, 问题 (3.10.9) 有一个最小弱解 u_* 和一个最大弱解 u^*, 即问题 (3.10.9) 位于区间 $\langle v,w\rangle$ 内的任意解 u 都满足 $u_*\leqslant u\leqslant u^*$.**

上面的结论可以推广到 Neumann 边值问题. 设 $\nu=(\nu_1,...,\nu_n)$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, A_i 满足条件 (A1) ~ (A4). 考虑 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\mathcal{A}u+B(x,u,Du)=f(x), & x\in\Omega, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n A_i(x,u,Du)\nu_i=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10.30}$$

函数 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 被称为是问题 (3.10.30) 的弱解, 如果 $B(x,u(x),Du(x))\in L^{p'}(\Omega)$, 并且

$$a(u,v)+\int_\Omega B(x,u,Du)v\mathrm{d}x=(f,v),\quad \forall\, v\in W^{1,p}(\Omega).$$

函数 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 被称为是问题 (3.10.30) 的弱上解, 如果 $B(x,u(x),Du(x)) \in L^{p'}(\Omega)$, 并且

$$a(u,v)+\int_\Omega B(x,u,Du)v\mathrm{d}x \geqslant (f,v),\ \ \forall\, v\in W^{1,p}(\Omega),\ v\geqslant 0.$$

如果上面的反向不等式成立 (检验函数 $v \geqslant 0$ 除外), 则称 u 是问题 (3.10.30) 的弱下解.

定理 3.10.7 ([2, 第四章定理 4.12]) 假设 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 是紧的 (当 Ω 具有 Lipschitz 边界时, 该嵌入一定是紧的). 那么定理 3.10.4 ~ 定理 3.10.6 的结论对于问题 (3.10.30) 仍然成立.

上面我们讨论了拟线性方程的 Dirichlet 边值问题和 Neumann 边值问题的弱上下解方法. 对于更一般的边值问题, 也有类似的结论.

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, $\partial\Omega \in C^2$ 并且 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, 其中 Γ_0 和 Γ_1 是两个互不相交的既开又闭集合 (其中有一个可以是空集). 又设 $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)y_iy_j > 0,\ \ \forall\, x\in\bar{\Omega},\ y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

考虑边值问题

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}u = f(x,u,Du), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10.31}$$

其中

$$\mathscr{B}u=\begin{cases} u, & x\in\Gamma_0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}+b(x)u, & x\in\Gamma_1, \end{cases}$$

$b \in C^1(\Gamma_1)$.

假设 $p > n$, 那么 $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$.

(1) 称函数 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ 是问题 (3.10.31) 的解, 如果

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}u = f(x,u,Du)$$

在 Ω 内几乎处处成立, 并且 $\mathcal{B}u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立.

(2) 称函数 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ 是问题 (3.10.31) 的上解, 如果

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}u \geqslant f(x,u,Du)$$

在 Ω 内几乎处处成立, 并且 $\mathcal{B}u \geqslant 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立. 如果这里的反向不等式成立, 则称 u 是问题 (3.10.31) 的下解.

定理 3.10.8 ([17, 定理 1]) 假设函数 $f(x,u,\eta)$ 在 $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上连续, 并且关于 u 和 η 局部 Lipschitz 连续. 又设 $f(x,u,\eta)$ 满足 Nagumo 条件, 即存在连续函数 $\psi:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$, 使得

$$|f(x,u,\eta)| \leqslant \psi(|u|)(1+|\eta|^2), \quad \forall\,(x,u,\eta)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

如果 v 和 w 分别是问题 (3.10.31) 的下解和上解, 并且满足 $v\leqslant w$, 那么问题 (3.10.31) 在区间 $\langle v,w\rangle$ 内有一个最小解和一个最大解.

3.11 无界区域上的上下解方法

上下解方法也可以用于无界区域上的边值问题, 我们仅以方程式的 Dirichlet 边值问题为例做一个简要介绍. 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个无界区域, 考虑边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f(x,u), & x\in\Omega, \\ u=\phi, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11.1}$$

这里的算子 $\mathscr{L}$ 由式 (3.3.1) 给出, 系数满足 3.3 节的条件, 并且对于任意的 $k\geqslant 1$, 右端函数 $f(x,u)\in C^\alpha(\bar{\Omega}_k\times\mathbb{R})$, 其中 $0<\alpha<1$, $\Omega_k=\{x\in\Omega: |x|<k\}$. 还假设边界函数 ϕ 可以延拓到 Ω, 延拓后的函数仍记为 ϕ, 使得对于任意的 $k\geqslant 1$, 有 $\phi\in W^{1,p}(\Omega_k)$. 本节中上下解的定义同于定义 3.3.2.

我们把 $\partial\Omega$ 分成两部分: $\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_\infty$, 其中

$$\Gamma_0=\big\{x\in\partial\Omega: |x|<\infty\big\}, \quad \Gamma_\infty=\big\{x\in\partial\Omega: |x|=\infty\big\}.$$

定理 3.11.1 假设 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 是问题 (3.11.1) 的有序上下解, $\bar{u},\underline{u}\in L^\infty(\Omega)$, $\underline{u}\leqslant\phi\leqslant\bar{u}$. 记 $m=\inf\limits_{\Omega}\underline{u}$, $M=\sup\limits_{\Omega}\bar{u}$. 又设 $f(x,u)$ 在 $\Omega\times[m,M]$ 上有界, 并且存在正常数 K 使得

$$f(x,u)-f(x,v)\geqslant -K(u-v), \quad \forall\, x\in\bar{\Omega},\ m\leqslant v\leqslant u\leqslant M.$$

如果在 Γ_∞ 上 $\underline{u}=\bar{u}$, 那么问题 (3.11.1) 存在解 $u\in\langle\underline{u},\bar{u}\rangle$.

证明 显然当 $k\longrightarrow\infty$ 时, $\Omega_k\longrightarrow\Omega$. 考虑有界区域上的边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f(x,u), & x\in\Omega_k, \\ u=\phi_k:=\phi|_{\partial\Omega_k}, & x\in\partial\Omega_k, \end{cases} \tag{3.11.2}$$

容易验证 $\bar{u}_k = \bar{u}|_{\Omega_k}$ 和 $\underline{u}_k = \underline{u}|_{\Omega_k}$ 是问题 (3.11.2) 的有序上下解. 于是问题 (3.11.2) 有解 $u_k \in C^{2+\alpha}(\Omega_k) \cap C^{\alpha}(\bar{\Omega}_k)$, 并且满足 $m \leqslant \underline{u}_k \leqslant u_k \leqslant \bar{u}_k \leqslant M$.

对于任意固定的 j, 当 $k > j$ 时, $\Omega_j \subset \Omega_k$. 先利用 L^p 估计, 再利用 Schauder 估计, 我们有

$$|u_k|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega}_j)} \leqslant C, \quad \|u_k\|_{C^{2+\alpha}(\Omega_j)} \leqslant C,$$

常数 C 不依赖于 k. 因为嵌入 $C^{2+\alpha}(\Omega_j) \hookrightarrow C^2(\Omega_j)$ 和 $C^{\alpha}(\bar{\Omega}_j) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}_j)$ 都是紧的, 所以在 $C^2(\Omega_j) \cap C(\bar{\Omega}_j)$ 中 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛的子列收敛到某个函数 u^*. 因为 u_k 满足

$$\mathscr{L}u_k = f(x, u_k), \quad x \in \Omega_j \subset \Omega_k,$$

所以 u^* 满足

$$\mathscr{L}u^* = f(x, u^*), \quad x \in \Omega_j. \tag{3.11.3}$$

再利用对角线方法可以推知, 存在函数 $u \in C^2(\Omega)$, 使得对于任意给定的 j, 有

$$\text{在 } C^2(\Omega_j) \cap C(\bar{\Omega}_j) \text{ 中 } u_k \longrightarrow u.$$

因为当 $k > j$ 时, 在 $\bar{\Omega}_j$ 上 $\underline{u} = \underline{u}_k \leqslant u_k \leqslant \bar{u}_k = \bar{u}$, 所以 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$ 成立. 利用式 (3.11.3) 又知, u 满足

$$\mathscr{L}u = f(x, u), \quad x \in \Omega.$$

再证明 u 满足边界条件 $u|_{\partial\Omega} = \phi$. 对于任意的 $x_0 \in \Gamma_0$, 存在充分大的 j, 使得对于所有的 $k \geqslant j$, 有 $x_0 \in \partial\Omega_k$. 于是 $u_k(x_0) = \phi(x_0)$. 又因为在 $\bar{\Omega}_j$ 上 $u_k \longrightarrow u$, 所以 $u(x_0) = \phi(x_0)$.

对于任意的 $x_0 \in \Gamma_{\infty}$, 存在 $x_k \in \partial\Omega_k$ 使得 $x_k \longrightarrow x_0$. 因为 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$, 所以 $\underline{u}(x_k) \leqslant u(x_k) \leqslant \bar{u}(x_k)$. 注意到 $\bar{u}, \underline{u} \in C(\bar{\Omega})$ 以及 $\bar{u}(x_0) = \underline{u}(x_0) = \phi(x_0)$, 令 $k \longrightarrow \infty$ 得 $u(x_0) = \phi(x_0)$. 证毕.

利用本节和上节的方法, 我们还可以讨论无界区域上的边值问题的弱上下解方法. 有兴趣的读者可以作为练习写出具体过程. 文献 [18] 在讨论 Belousov-Zhibatinskii 化学反应模型的波前解时, 利用了无界区域上的弱上下解方法.

习 题 3

3.1 证明当 $a > \lambda_1$ 时, 问题 (3.4.2) 的唯一正解 u 满足 $0 < u(x) < 1, x \in \Omega$.

3.2 证明定理 3.4.3 的结论 (1) 和 (2).

3.3 证明定理 3.4.4.

3.4 给出定理 3.5.1 的结论 (2) 的详细证明.

3.5 假设函数列 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 中有界. 试证明存在 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的子列 (仍记为它自身) 以及函数 $u\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 使得对于任意的 $1<p<\infty$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_i\longrightarrow u$.

3.6 给出定理 3.6.5 的详细证明.

3.7 考察边值问题 (3.8.2). 假定 $q, f\in C(\bar\Omega)$ 且在 $\bar\Omega$ 上 $f>0$, k 是一个常数. 试证明如果问题 (3.8.2) 有一个正的严格下解 $\underline{w}$, 那么问题 (3.8.2) 有唯一正解 w, 并且 $\lambda_1(q)<k$, $\underline{w}<w$; 反之, 如果 $k>\lambda_1(q)$, 那么问题 (3.8.2) 存在唯一正解.

3.8 讨论捕食模型的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u(a-u-bv), & x\in\Omega,\\ -\Delta v = v(c-v+ku), & x\in\Omega,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

其中 a,b,c 和 k 都是正常数, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域. 给出适当的条件 (关于系数 a,b,c,k), 利用上下解方法讨论正解的存在性.

3.9 假设 Ω 同上, 考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u\Big(a-u-\dfrac{mv}{k+u}\Big), & x\in\Omega,\\ -\Delta v = v\Big(b-\dfrac{v}{1+u}\Big), & x\in\Omega,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.A}$$

其中 a,b,m 和 k 都是正常数. 试证明下面的结论:

(1) 假设 (u,v) 是问题 (3.A) 的非负解, 则有

$$u(x)<a,\quad v(x)<b(1+a),\quad \forall\, x\in\bar\Omega;$$

(2) 如果问题 (3.A) 有正解 (u,v), 则 $a,b>\lambda_1$ 并且

$$u(x)<\theta_a(x)<a,\quad \theta_b(x)<v(x)<\theta_{a,b}(x)<b(1+a),\quad \forall\, x\in\Omega,$$

这里 $\theta_{a,b}(x)$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u = bu-\dfrac{u^2}{1+\theta_a(x)}, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的唯一正解. 由此知, 如果问题 (3.A) 有正解, 那么 $b>\lambda_1$, $a>\lambda_1\left(\dfrac{m\theta_b}{k+\theta_a}\right)$.

3.10　在定理 3.10.1 中, 假设 $f(x,u)$ 关于 x,u 都属于 C^α, 试证明那里得到的解还是古典解, 即 $u\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

3.11　假设 $a<c<d<b$, $\Omega=(a,b)$, $\Omega_0=(c,d)$. 用左右导数解释不等式 (3.10.7).

3.12　关于弱下解, 给出一个与定理 3.10.2 类似的定理.

3.13　证明结论 (3.10.25).

3.14　证明结论 (3.10.26).

第 4 章　拓扑度和分支理论

非线性泛函分析中的拓扑度理论和分支 (也称为分歧, 或分叉) 理论, 是研究椭圆型方程和方程组的边值问题解的存在性的重要工具. 鉴于本书的主要目的是讨论椭圆型方程, 而不是非线性泛函分析, 所以我们只介绍那些在椭圆型方程的应用中经常出现的有关拓扑度和分支理论的主要结果. 因此本章可以看成是拓扑度和分支理论的速成. 本章前六节的内容较多地参考了文献 [19].

4.1　有限维空间上的拓扑度 (Brouwer 度)

本节讨论有限维空间上的拓扑度的定义、性质及其应用.

4.1.1　定义

本节总假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 映射 $\phi: \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

定义 4.1.1　假设 $\phi \in C^1(\Omega)$.

(a) 点 $x_0 \in \Omega$ 称为 ϕ 的正则点, 如果 ϕ 在点 x_0 的 Jacobi 矩阵 $J_\phi(x_0)$ 是非退化的;

(b) 非正则点称为临界点;

(c) $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 称为 ϕ 的临界值, 如果原像集合 $\phi^{-1}(y_0)$ 包含一个临界点. 否则就称为 ϕ 的正则值.

我们先用代数方法定义 C^1 函数在正则值处的拓扑度. 设 $\phi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$ 是 ϕ 的一个正则值. 利用隐函数定理容易推出, 集合

$$\phi^{-1}(y_0) = \{x \in \Omega : \phi(x) = y_0\}$$

仅由孤立点构成, 并且是有限集, 记为

$$\phi^{-1}(y_0) = \{x_1, \cdots, x_k\}.$$

定义 4.1.2　假设 $\phi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$ 是 ϕ 的一个正则值, 定义 ϕ 在 y_0 处的拓扑度 (Brouwer 度) 为

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, y_0) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{sgn}|J_\phi(x_j)|,$$

其中 $|J_\phi|$ 为 J_ϕ 的行列式.

这样定义的拓扑度 $\mathrm{d}(\phi,\Omega,y_0)$ 是一个整数, 并且计算非常简单. 由定义可以看出, 恒同映射 I 的拓扑度是 1.

为了定义临界值处的拓扑度, 我们需要先给出拓扑度的积分定义并证明 Sard 定理.

为了利用积分的方式定义拓扑度, 我们先叙述微分几何中的一些记号. 记 d 是映 i–微分形式到 $(i+1)$–微分形式的外微分算子, ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑的 $(n-1)$–微分形式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}g_i(y)\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i-1}\wedge\mathrm{d}y^{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n,$$

那么

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y^i}\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n$$

是一个 n–微分形式, 简记 $\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n=\widetilde{\mathrm{d}y}$. 如果 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑的 n–微分形式

$$\mu=f(y)\widetilde{\mathrm{d}y},$$

而 $\phi\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, 则有

$$(\mu\circ\phi)(x)=f(\phi(x))|J_\phi(x)|\,\widetilde{\mathrm{d}x}.$$

Green 公式 如果 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有紧支集的 $(n-1)$–微分形式, 那么

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}\omega=0.$$

由微分学的结论知, 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 n–微分形式 $\mu=f(y)\,\widetilde{\mathrm{d}y}$ 而言, 如果 $y=\phi(x)$ 是一个非退化的变换, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mu=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\,\widetilde{\mathrm{d}y}=\mathrm{sgn}|J_\phi|\int_{\mathbb{R}^n}f(\phi(x))|J_\phi(x)|\,\widetilde{\mathrm{d}x}=\mathrm{sgn}|J_\phi|\int_{\mathbb{R}^n}\mu\circ\phi.$$

定义 4.1.3 假设 $\phi\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $y_0\in\mathbb{R}^n\setminus\phi(\partial\Omega)$, $\mu=f(y)\,\widetilde{\mathrm{d}y}$ 是一个有紧支集 K 的 C^∞ 的 n–微分形式, 并且满足 $y_0\in K\subset\mathbb{R}^n\setminus\phi(\partial\Omega)$, $\int_{\mathbb{R}^n}\mu=1$. 具有这些性质的微分形式称为关于 y_0 和 ϕ 是可取的. 定义 ϕ 在 y_0 处的拓扑度 (Brouwer 度)

$$\deg(\phi,\Omega,y_0)=\int_\Omega\mu\circ\phi.$$

下面的引理说明这种定义是合理的.

引理 4.1.1 设 $\mu = f(y)\widetilde{\mathrm{d}y}$ 是一个有紧支集 K 的 C^∞ 的 n–微分形式, 满足 $\int_{\mathbb{R}^n} \mu = 0$, 那么存在一个 $(n-1)$–微分形式 ω, 使得 $\mathrm{supp}\,\omega \subset K$, $\mu = \mathrm{d}\omega$.

证明 不妨认为 K 是一个立方体, 要证存在 g_i, 其支集属于 K, 使得

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i(y)}{\partial y^i}. \tag{4.1.1}$$

若能如此, 就有 $\mu = \mathrm{d}\omega$, 其中

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} g_i \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i-1} \wedge \mathrm{d}y^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n.$$

用归纳法证明式 (4.1.1). 当 $n = 1$ 时, $g_1(y) = \int_{-\infty}^{y} f(s)\mathrm{d}s$ 满足 $f\mathrm{d}y = \mathrm{d}g_1$, 结论成立. 假设结论对于 n 成立, 要证对于 $n+1$ 也成立. 令

$$y^{n+1} = t, \quad (y, t) = (y^1, \cdots, y^n, t), \quad m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, t)\mathrm{d}t.$$

因为 $\int_{\mathbb{R}^n} m(y)\,\widetilde{\mathrm{d}y} = 0$, 由归纳假设知

$$m(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i(y)}{\partial y^i}, \quad 其中\ \mathrm{supp}\ g_i \subset K.$$

取 $\tau(t)$ 是一个 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数, 其支集在 K 的第 $n+1$ 个坐标对应的边上, 并且满足 $\int_{-\infty}^{\infty} \tau(t)\mathrm{d}t = 1$. 考虑差 $f(y, t) - \tau(t)m(y)$. 该函数关于 t 在 $\mathbb{R}$ 上的积分为零, 于是函数

$$g(y, t) = \int_{-\infty}^{t} (f(y, s) - \tau(s)m(y))\mathrm{d}s$$

的支集属于 K, 且满足 $\dfrac{\partial g}{\partial t} = f(y, t) - \tau(t)m(y)$. 从而

$$f(y, y^{n+1}) = \frac{\partial g}{\partial y^{n+1}}(y, y^{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i(y)}{\partial y^i} \tau(y^{n+1}).$$

引理得证.

如果 ν, μ 都是关于 y_0 和 ϕ 可取的, 那么 $\nu - \mu$ 满足引理 4.1.1 的条件. 于是存在一个 $(n-1)$–微分形式 ω, 使得 $\nu - \mu = \mathrm{d}\omega$, $\mathrm{supp}\,\omega \subset K$. 由 Green 公式知

$$\int_{\Omega} \nu \circ \phi - \int_{\Omega} \mu \circ \phi = \int_{\Omega} (\nu - \mu) \circ \phi = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega \circ \phi = \int_{\Omega} \mathrm{d}(\omega \circ \phi) = \int_{\partial\Omega} \omega \circ \phi = 0.$$

这说明定义 4.1.3 是合理的.

定理 4.1.1　当 y_1 靠近 y_0 时, $\deg(\phi, \Omega, y_0) = \deg(\phi, \Omega, y_1)$.

证明　因为当 y_1 充分靠近 y_0 时, 关于 y_0 是可取的任意 μ 也是关于 y_1 可取的, 所以

$$\deg(\phi, \Omega, y_1) = \int_\Omega \mu\circ\phi = \deg(\phi, \Omega, y_0).$$

定理得证.

该定理说明, 在 $\mathbb{R}^n\backslash\phi(\partial\Omega)$ 的任一连通分支 C 上, 按照上述方式定义的度是一个常数. 有时也写成 $\deg(\phi, \Omega, C)$.

定理 4.1.2　假设 y_0 是 ϕ 的一个正则值, 则 $\mathrm{d}(\phi, \Omega, y_0) = \deg(\phi, \Omega, y_0)$. 因为任意的 $y_0 \notin \phi(\bar{\Omega})$ 都是 ϕ 的正则值, 所以 $\deg(\phi, \Omega, y_0) = 0, \forall\, y_0 \notin \phi(\bar{\Omega})$.

证明　令 $\phi^{-1}(y_0) = \{x_1, \cdots, x_k\}$, 则存在互不相交的 x_i 的邻域 N_i, 在每一个 N_i 上 ϕ 是 1—1 的, 集合 $N = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \phi(N_i)$ 是 y_0 的一个邻域. 设 μ 是可取的, 且支集属于 N. 把 N_i 取得适当小, 使得 $\phi\left(\Omega\backslash\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} N_i\}\right)\bigcap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\phi(N_i)\right) = \varnothing$, 则有

$$\begin{aligned}\deg(\phi, \Omega, y_0) &= \int_\Omega \mu\circ\phi = \sum_{i=1}^{k}\int_{N_i}\mu\circ\phi\\ &= \sum_{i=1}^{k}\mathrm{sgn}|J_\phi(x_i)|\int_{\mathbb{R}^n}\mu = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{sgn}|J_\phi(x_i)| = \mathrm{d}(\phi, \Omega, y_0).\end{aligned}$$

定理得证.

为了利用代数方法定义临界值处的拓扑度 (Brouwer 度), 我们需要证明下面的 Sard 定理.

定理 4.1.3 (Sard 定理)　假设 $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的, 那么 F 的临界值的集合是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个零测集.

证明　只要在一个边长为 1 的闭立方体 $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ 上考虑 F 就足够了. 将这个立方体分成 N^n 等份, 当 x, x_0 同属于一个小立方体 C 时, 就有

$$F(x) = F(x_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)(x - x_0) + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

如果 x_0 是一个临界点, 则 $\det\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\right) = 0$. 于是 C 的像落在某个柱体内, 这个柱体的底属于 $n-1$ 维空间, 底的面积不超过 $M\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$ (M 是某一正常数), 高不超过 $o\left(\frac{1}{N}\right)$. 因此该柱体的测度不超过 $o\left(\frac{1}{N^n}\right)$, 从而 C 的像的测度不超过

$o\left(\frac{1}{N^n}\right)$. 因为包含 F 的临界点的小立方体最多有 N^n 个, 所以包含 F 的临界点的所有小立方体在 F 下的像的测度不超过 $N^n o\left(\frac{1}{N^n}\right)$, 进而推知 F 的临界值的集合的测度不超过 $N^n o\left(\frac{1}{N^n}\right) \longrightarrow 0$ (当 $N \longrightarrow \infty$ 时). 因而 F 的临界值的集合是零测集. 证毕.

现在利用代数方法定义临界值处的拓扑度 (Brouwer 度). 假设 $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$ 是 ϕ 的一个临界值, 那么存在一个包含点 y_0 的连通分支 $C \subset \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$. 前面已经说明 (定理 4.1.1), 在 C 上拓扑度 $\deg(\phi, \Omega, y)$ 是常数, 记为 $\deg(\phi, \Omega, C)$. 根据 Sard 定理, 存在正则值 $y^* \in C$. 再由定理 4.1.2,

$$\deg(\phi, \Omega, y_0) = \deg(\phi, \Omega, C) = \deg(\phi, \Omega, y^*) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, y^*).$$

4.1.2 基本性质

定理 4.1.4 (同伦不变性) *考虑单参数族映射 $\phi_t(x) : \bar{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. 假设 $\phi_t(x)$ 在 $\bar{\Omega} \times [0,1]$ 上是连续的, 并且对于每一个 $t \in [0,1]$, 有 $\phi_t(\cdot) \in C^1(\Omega)$. 如果对于所有的 $t \in [0,1]$, 都有 $y_0 \notin \phi_t(\partial\Omega)$, 那么拓扑度 $\deg(\phi_t, \Omega, y_0)$ 不依赖于 t.*

证明 显然集合 $\mathcal{D} = \{\phi_t(x) : x \in \partial\Omega, t \in [0,1]\}$ 是闭的, 不包含 y_0. 考虑一个可取的 μ, 它的支集包含在 y_0 的一个与 $\mathcal{D}$ 不相交的邻域内, 那么

$$\deg(\phi_t, \Omega, y_0) = \int_\Omega \mu \circ \phi_t.$$

容易看出, 这是 t 的一个连续函数. 又因为 $\deg(\phi_t, \Omega, y_0)$ 是整数, 故不依赖于 t, 即是常值. 证毕.

定理 4.1.5 (可加性) *设 Ω_i, $i = 1, 2, \cdots$, 是一列包含于 Ω 的互不相交的开集. 如果 $y_0 \notin \phi\left(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i\right)$, 那么集合 $\{\deg(\phi, \Omega_i, y_0)\}_{i=1}^{\infty}$ 中至多有有限多个数不为零, 并且*

$$\deg(\phi, \Omega, y_0) = \sum_i \deg(\phi, \Omega_i, y_0).$$

证明 由于 $\phi\left(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i\right)$ 是闭的, 并且 $y_0 \notin \phi\left(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i\right)$, 故存在与 $\phi\left(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i\right)$ 不相交的 y_0 的邻域 N. 取 ϕ 的一个正则值 $y \in N$, 则有

$$\deg(\phi, \Omega, y_0) = \deg(\phi, \Omega, y), \quad \deg(\phi, \Omega_i, y_0) = \deg(\phi, \Omega_i, y).$$

根据定理 4.1.2, 当 $\phi^{-1}(y) \cap \Omega_i = \varnothing$ 时, $\deg(\phi, \Omega_i, y) = 0$, 因而 $\deg(\phi, \Omega_i, y_0) = 0$. 由于 y 是 ϕ 的正则值, 所以 $\phi^{-1}(y)$ 最多与有限个 Ω_i 相交. 因此集合 $\{\deg(\phi, \Omega_i,$

$y_0)\}_{i=1}^{\infty}$ 中至多有有限多个数不为零.

又因为 y 是 ϕ 的正则值, 再次利用定理 4.1.2 有 $\deg(\phi, \Omega, y) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, y)$. 由于 Ω_i 互不相交, 根据正则值处度的定义易知, $\deg(\phi, \Omega, y_0) = \sum_i \deg(\phi, \Omega_i, y_0)$. 证毕.

定理 4.1.6 (切除性) 假设 D 是 $\bar{\Omega}$ 的一个闭子集, $y_0 \notin \phi(D) \cup \phi(\partial\Omega)$, 则

$$\deg(\phi, \Omega, y_0) = \deg(\phi, \Omega \backslash D, y_0).$$

证明 令 $\Omega_1 = \Omega \backslash D$, 直接利用定理 4.1.5 即可.

定理 4.1.7 (乘积性质) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega^* \subset \mathbb{R}^m$ 都是有界开集, $\phi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi^*: \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}^m$, 并且 ϕ 和 ϕ^* 分别在 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $y_0^* \in \mathbb{R}^m$ 处的度有定义. 则

$$\deg(\phi \cdot \phi^*, \Omega \times \Omega^*, (y_0, y_0^*)) = \deg(\phi, \Omega, y_0)\deg(\phi^*, \Omega^*, y_0^*).$$

证明 令 μ, μ^* 分别关于 ϕ 在 y_0 点, ϕ^* 在 y_0^* 点是可取的, 那么 $\mu \cdot \mu^*$ 是 $\phi \cdot \phi^*$ 在 (y_0, y_0^*) 点可取的 $(n+m)$–微分形式, 同时

$$\int_{\Omega \times \Omega^*} (\mu \cdot \mu^*) \circ (\phi \cdot \phi^*) = \int_{\Omega} \mu \circ \phi \int_{\Omega^*} \mu^* \circ \phi^*.$$

定理 4.1.8 假设 ϕ 是 1-1 的且保持 $\mathbb{R}^n$ 的方向不变 (或者是反转 $\mathbb{R}^n$ 的方向). 那么对任何 $y_0 \in \phi(\Omega) \setminus \phi(\partial\Omega)$, 有 $\deg(\phi, \Omega, y_0) = \pm 1$. 特别地当 $\phi = I$ 或 $-I$ 时, 对任何 $y_0 \in \phi(\Omega) \setminus \phi(\partial\Omega)$, 有

$$\deg(\phi, \Omega, y_0) = 1, \text{ 或者 } (-1)^n.$$

注 4.1.1 (连续映射的度) 我们可以把度的定义推广到连续映射 ϕ. 设 $\phi \in C(\bar{\Omega})$, 取 $\phi_i \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 在 $C(\bar{\Omega})$ 中 $\phi_i \longrightarrow \phi$. 利用定理 4.1.4 可以证明, 对于任意固定的 $y_0 \notin \phi(\partial\Omega)$, 当 i 很大时度 $\deg(\phi_i, \Omega, y_0)$ 与 i 无关. 我们把这个与 i 无关的数定义为连续映射 ϕ 在 y_0 处的 Brouwer 度 $\deg(\phi, \Omega, y_0)$. 对于这样定义的连续函数的 Brouwer 度, 定理 4.1.4 至定理 4.1.8 仍然成立.

定理 4.1.9 (边界性质) 假设 $\psi: \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{y_0\}$ 是一个给定的连续映射. 那么, 对于 ψ 的任意一个到 Ω 的连续延拓 ϕ, 度 $\deg(\phi, \Omega, y_0)$ 有定义且不依赖于延拓方式, 亦即当 $\phi_1, \phi_2: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 连续, 且在 $\partial\Omega$ 上 $\phi_1 = \phi_2 = \psi$ 时, 有 $\deg(\phi_1, \Omega, y_0) = \deg(\phi_2, \Omega, y_0)$. 我们定义上述值为 $\deg(\psi, \Omega, y_0)$.

定理 4.1.10 (复合映射的 Leray 乘积) 假设开集 $\Omega, D \subset \mathbb{R}^n$ 都是有界开集. 又设 $\phi: \bar{\Omega} \longrightarrow D$, $\psi: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续映射. 记 $\{D_i\}$ 是 $D \backslash \phi(\partial\Omega)$ 的所有连通分支, 那么对于任意给定的 $z \notin (\psi \circ \phi)(\partial\Omega)$, 有

$$\deg(\psi \circ \phi, \Omega, z) = \sum_i \deg(\phi, \Omega, D_i) \cdot \deg(\psi, D_i, z),$$

并且上式右端是有限和.

证明 利用逼近, 我们可以假设 $\phi,\psi\in C^1$ 并且 z 是 $\psi\circ\phi$ 和 ψ 的正则值. 那么

$$\begin{aligned}\deg(\psi\circ\phi,\ \Omega,\ z)&=\sum_{\substack{x\in\Omega,\\ \psi\circ\phi(x)=z}}\operatorname{sgn}|J_{\psi\circ\phi}(x)|\\ &=\sum_{\substack{x\in\Omega,\\ \psi\circ\phi(x)=z}}\operatorname{sgn}|J_{\psi}(\phi(x))|\cdot\operatorname{sgn}|J_{\phi}(x)|\\ &=\sum_{\substack{y\in D,\\ \psi(y)=z}}\operatorname{sgn}|J_{\psi}(y)|\sum_{\substack{x\in\Omega,\\ \phi(x)=y}}\operatorname{sgn}|J_{\phi}(x)|\\ &=\sum_{y\in D\cap\psi^{-1}(z)}\operatorname{sgn}|J_{\psi}(y)|\deg(\phi,\ \Omega,\ y).\end{aligned}$$

因为 $\psi^{-1}(z)$ 是有限集, 故只能与有限个 D_i 相交, 所以

$$\begin{aligned}\deg(\psi\circ\phi,\ \Omega,\ z)&=\sum_{y\in D_i\cap\psi^{-1}(z)}\operatorname{sgn}|J_{\psi}(y)|\deg(\phi,\Omega,y)\\ &=\sum_{y\in D_i\cap\psi^{-1}(z)}\operatorname{sgn}|J_{\psi}(y)|\deg(\phi,\Omega,D_i)\\ &=\sum_{y\in D_i\cap\psi^{-1}(z)}\deg(\phi,\Omega,D_i)\cdot\deg(\psi,\ D_i,\ z)\\ &=\sum_{i}\deg(\phi,\Omega,D_i)\cdot\deg(\psi,\ D_i,\ z).\end{aligned}$$

定理得证.

4.1.3 应用

从度的定义可知, 如果在 Ω 中 $\phi(x)\neq y$, 那么度 $\deg(\phi,\ \Omega,\ y)=0$. 反之, 若度 $\deg(\phi,\ \Omega,\ y)\neq 0$, 方程 $\phi(x)=y$ 在 Ω 中有解.

本节中, 我们用 B 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球 (开球).

定理 4.1.11 *若 $\phi:\bar{B}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 满足*

$$\phi(x)+\lambda x\neq 0,\quad \forall\ \lambda\geqslant 0,\quad x\in\partial B,$$

则方程 $\phi(x)=0$ 在 B 内有解.

证明 根据假设, 在 ∂B 上 $\phi(x)\neq 0$, 所以度 $\deg(\phi,B,0)$ 有定义. 构造 ϕ 的同伦变形

$$\phi_t(x)=t\phi(x)+(1-t)x,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

由假设条件知, $\phi_t(x)\neq 0,\ \forall\, x\in\partial B$, 于是

$$\deg(\phi, B, 0) = \deg(\phi_t, B, 0) = \deg(I, B, 0) = 1.$$

因此 $\phi(x) = 0$ 在 B 内有解. 证毕.

注 4.1.2 假设对任意的 $\lambda \geqslant 0$ 和 $x \in \partial B$, 都有 $\phi(x) \neq \lambda x$, 那么方程 $\phi(x) = 0$ 在 B 内有解 (只要把上面的方法用于 $-\phi$ 即可).

定理 4.1.12 (Brouwer 不动点定理) 假设 $F: \bar{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C(\bar{B})$, $F(\partial B) \subset \bar{B}$, 则 F 至少有一个不动点, 即存在 $x \in \bar{B}$, 满足 $F(x) = x$.

证明 假设对所有的 $x \in \partial B$, 都有 $F(x) \neq x$. 定义 $\phi(x) = x - F(x)$, 那么在 ∂B 上 $\phi(x) \neq 0$. 先证明对于所有的 $\lambda \geqslant 0$ 和 $x \in \partial B$, 都有 $\phi(x) + \lambda x \neq 0$. 如若不然, 则存在 $x \in \partial B$ 和 $\lambda > 0$, 使得 $x - F(x) + \lambda x = 0$, 即

$$F(x) = (1 + \lambda)x.$$

由 $|F(x)| \leqslant 1$ 和 $|x| = 1$ 知, $\lambda = 0$. 矛盾. 利用定理 4.1.11 知 $F(x) - x = 0$ 在 B 内有解, 即 F 在 B 内有不动点. 证毕.

注 4.1.3 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭凸集, $F: \Omega \longrightarrow \Omega$ 连续, 那么 F 在 Ω 上有不动点.

定理 4.1.13 假设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 连续, 且

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{(\phi(x), x)}{|x|} = \infty. \tag{4.1.2}$$

那么 ϕ 是到上的, 即对每一个 $y \in \mathbb{R}^n$, 方程 $\phi(x) = y$ 有解.

证明 对于函数 $\phi(x) - y$, 式 (4.1.2) 仍然成立, 因此可认为 $y = 0$. 于是存在 $R > 0$ 使得

$$(\phi(x), x) \geqslant 0, \quad \forall\, |x| = R. \tag{4.1.3}$$

如果在 $|x| = R$ 上 $\phi(x) \neq 0$ (否则, 定理得证), 那么由式 (4.1.3) 知

$$\phi(x) + \lambda x \neq 0, \quad \forall\, \lambda \geqslant 0, \ |x| = R.$$

利用定理 4.1.11 便可推知, $\phi(x) = 0$ 有解. 证毕.

定理 4.1.14 (Borsuk) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点且关于原点对称的有界开集, $\psi: \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 是连续的奇映射, 即 $\psi(-x) = -\psi(x)$. 那么度 $\deg(\psi, \Omega, 0)$ 是奇数.

定理 4.1.15 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开集, $n = n_1 + n_2$, 分解

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}, \quad x = (x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

考虑映射 $F: \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$F(x) = x + \varphi(x) = (x_1 + \varphi(x_1 + x_2), x_2),$$

其中 $\varphi\colon \bar{\Omega}\longrightarrow \mathbb{R}^{n_1}$. 如果 $y\in\mathbb{R}^{n_1}$, $y\notin F(\partial\Omega)$, 则有

$$\deg(F,\ \Omega,\ y)=\deg(F|_{\Omega_1},\ \Omega_1,\ y),$$

其中 $\Omega_1=\mathbb{R}^{n_1}\cap\Omega$.

证明 不妨假设 $F\in C^1(\Omega)$, $y=0$. 对于 $i=1,2$, 令 $f_i(y_i)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n_i})$, f_i 的支集在原点附近且满足

$$\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(y_i)\,\widetilde{\mathrm{d}y_i}=1.$$

由度的定义知

$$\deg(F,\ \Omega,\ 0)=\int_{\mathbb{R}^n}(f_1\cdot f_2)\circ F\,\widetilde{\mathrm{d}x}.$$

因为 $\det\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)=\det\left(I+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$, 后者实际上是一个 $n_1\times n_1$ 的行列式, 所以

$$\deg(F,\Omega,0)=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_1(x_1+\varphi(x_1+x_2))f_2(x_2)|\det(I+\varphi_{x_1}(x_1+x_2))|\widetilde{\mathrm{d}x_2}\widetilde{\mathrm{d}x_1}.$$

我们可以用一列度不变且趋向于 δ–函数的函数来代替 $f_2(x_2)$, 然后再取极限就得到

$$\deg(F,\Omega,0)=\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_1(x_1+\varphi(x_1))|\det(I+\varphi_{x_1}(x_1))|\,\widetilde{\mathrm{d}x_1}=\deg(F|_{\Omega_1},\Omega_1,0).$$

定理得证.

4.2 Banach 空间上的拓扑度 (Leray-Schauder 度)

4.2.1 Schauder 不动点定理

我们希望把有限维空间上的度理论推广到无穷维空间, 特别是 Banach 空间. 但是需小心谨慎, 比如说 Brouwer 不动点定理. Brouwer 不动点定理是说, 把 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界闭凸集 K 映入自身的连续映射至少有一个不动点. 然而, 对无穷维空间来讲这个结论不再成立.

例 令 $X=\ell_2$ (满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty$ 的复数序列 $x=(x_1,\cdots,x_i,\cdots)$ 构成的空间), B 是 ℓ_2 中的单位球, $f(x)=(\sqrt{1-\|x\|^2},x_1,x_2,\cdots)$ 是 B 到 B 的映射, 那么 f 是连续的、没有不动点. 事实上, 如果 $x=(x_1,\cdots,x_i,\cdots)$ 是 f 的一个不动点, 由 $\|f(x)\|=1$ 知 $\|x\|=1$. 于是

$$x=(\sqrt{1-\|x\|^2},x_1,x_2,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots).$$

由此推得, $x_1=0, x_2=x_1, x_3=x_2, \cdots$, 即 $x_1=x_2=\cdots=0$. 矛盾.

对于无穷维情形, 为了保证 f 有不动点, 只要求 f 连续是不够的, 还需要列紧性.

定义 4.2.1　设 X 是 Banach 空间, $\Omega\subset X$. 连续映射 $f:\Omega\longrightarrow X$ 称为是紧的, 如果对 Ω 的任意有界闭子集 $\Omega'\subset\Omega$, 集合 $f(\Omega')$ 是紧的.

从现在开始至 4.6 节结束, X, Y, Z 等都表示 Banach 空间.

定理 4.2.1　设 Ω 是 X 的一个有界闭子集. 那么 $f:\Omega\longrightarrow X$ 是紧的当且仅当 f 是一列连续有界的有限维映射 (即映射的像集属于一个有限维空间) 的一致极限.

证明　先设 f 是紧的. 那么 $f(\Omega)$ 是 X 的紧子集. 给定 $\varepsilon>0$, 存在以 $x_1,\cdots,x_{m(\varepsilon)}\in f(\Omega)$ 为心、以 ε 为半径的有限个球 $B_1,\cdots B_{m(\varepsilon)}$ 覆盖 $f(\Omega)$. 又设 $\{\psi_i(y)\}_{i=1}^{m(\varepsilon)}$ 是从属于开覆盖 $\{B_i\}_{i=1}^{m(\varepsilon)}$ 的 $f(\Omega)$ 上的单位分解, 即

$$\psi_i(y)\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{m(\varepsilon)}\psi_i(y)=1,\quad \forall\, y\in f(\Omega);\quad 且\ \psi_i(y)=0,\quad \forall\, y\notin B_i.$$

记 $f_\varepsilon(x)=\sum\limits_{i=1}^{m(\varepsilon)}\psi_i(f(x))x_i$, 则 f_ε 的值域属于 $\{x_1,\cdots,x_{m(\varepsilon)}\}$ 的凸包, 并且

$$\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|=\left\|\sum_{i=1}^{m(\varepsilon)}\psi_i(f(x))[x_i-f(x)]\right\|.$$

如果 $\psi_i(f(x))>0$, 则 $f(x)\in B_i$, 故 $\|x_i-f(x)\|<\varepsilon$. 由此推知 $\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|<\varepsilon$ 关于 x 一致成立. 显然 $f_\varepsilon(x)$ 是连续有界的有限维映射 (每一个 f_ε 的像集属于由 $\{x_1,\cdots,x_{m(\varepsilon)}\}$ 生成的子空间).

反之, 如果 f_i 是连续有界的有限维映射, 且 $f_i\longrightarrow f$ 一致成立, 那么 $f_i(\Omega)$ 是一个有限维空间中的有界闭集. 对任意的 $\varepsilon>0$, 在该有限维空间中存在 $f_i(\Omega)$ 的一个有限 ε–网 (以 ε 为半径的有限覆盖). 又因为 $f_i\longrightarrow f$ 是一致的, 所以存在 $f(\Omega)$ 的一个有限 2ε–网, 因此集合 $f(\Omega)$ 是紧的, 从而映射 f 是紧的. 证毕.

下面证明 Brouwer 不动点定理的类似结论 —— Schauder 不动点定理.

定理 4.2.2 (Schauder 不动点定理)　假设 Ω 是 X 中的有界闭凸集, $f:\Omega\longrightarrow\Omega$ 是紧的, 则 f 在 Ω 上有不动点.

证明　这里沿用定理 4.2.1 的证明过程中的记号. 对于 $\varepsilon>0$, 取 f_ε 是按上述方式 (定理 4.2.1 的证明过程) 得到的 f 的 ε- 逼近, N_ε 是由 $x_1,\cdots,x_{m(\varepsilon)}$ 生成的子空间. 注意到 Ω 是凸的, $x_1,\cdots,x_{m(\varepsilon)}\in f(\Omega)$, 故 $f_\varepsilon(\Omega)$ 包含在 $f(\Omega)$ 的凸闭包中. 又因为 $f_\varepsilon(\Omega)$ 属于 $\{x_1,\cdots,x_{m(\varepsilon)}\}$ 的凸包, $x_1,\cdots,x_{m(\varepsilon)}\in f(\Omega)\subset\Omega$, 所以

$f_\varepsilon : \Omega \longrightarrow \Omega \cap N_\varepsilon$. 这说明 f_ε 把 N_ε 中的有界闭凸集 $\Omega \cap N_\varepsilon$ 映入自身. 利用 Brouwer 不动点定理知, f_ε 在 $\Omega \cap N_\varepsilon$ 中有不动点 x_ε, 即 $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. 由 $f(x_\varepsilon) \in f(\Omega)$ 以及 $f(\Omega)$ 的紧性知, 存在 $\{f(x_\varepsilon)\}$ 的子序列仍记为它自身, 和 $y_0 \in f(\Omega)$, 使得当 $\varepsilon \to 0$ 时, $f(x_\varepsilon) \longrightarrow y_0$. 利用 $\|f_\varepsilon(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon$ 推知, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $f_\varepsilon(x_\varepsilon) \longrightarrow y_0$, 即 $x_\varepsilon \longrightarrow y_0$. 再利用 f 的连续性可得 $f(y_0) = y_0$, 故 y_0 是 f 的不动点. 证毕.

定理 4.2.3 (Schauder 不动点定理的推广) *设 Ω 是 X 中的一个内部不空的有界闭集, $f : \Omega \longrightarrow X$ 是紧的. 记 Ω° 是 Ω 的内部. 如果存在 $w \in \Omega^\circ$, 使得对所有的 $\lambda > 1$ 和 $x \in \partial\Omega^\circ$, 都有 $f(x) - w \neq \lambda(x - w)$, 那么 f 在 Ω 上有不动点.*

证明 不妨认为 $\overline{\Omega^\circ} = \Omega$, $w = 0$, 并且

$$f(x) \neq \lambda x, \quad \forall\, \lambda \geqslant 1,\ x \in \partial\Omega. \tag{4.2.1}$$

我们仍沿用定理 4.2.1 的证明过程中的记号. 对于 $\varepsilon > 0$, 记 f_ε 是 f 的 ε-逼近, N_ε 是由 $x_1, \cdots, x_{m(\varepsilon)}$ 生成的子空间, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap N_\varepsilon$, 那么 $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cap N_\varepsilon$, $f_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) \subset N_\varepsilon$.

首先证明: 当 $\varepsilon \ll 1$ 时,

$$f_\varepsilon(x) \neq \lambda x, \quad \forall\, \lambda \geqslant 1,\ x \in \partial\Omega_\varepsilon. \tag{4.2.2}$$

用反证法. 假设存在 $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\lambda_\varepsilon \geqslant 1$ 和 $x_\varepsilon \in \partial\Omega_\varepsilon$, 满足

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon x_\varepsilon. \tag{4.2.3}$$

因为 $\{f(x_\varepsilon)\}$ 是紧的, 而且 f_ε 一致逼近 f, 所以 $\{f(x_\varepsilon)\}$ 有收敛的子列. 不妨认为 $f_\varepsilon(x_\varepsilon) \longrightarrow y_0$.

如果 λ_ε 无界, 不妨认为 $\lambda_\varepsilon \to \infty$. 那么由式 (4.2.3) 得 $x_\varepsilon = f_\varepsilon(x_\varepsilon)/\lambda_\varepsilon \longrightarrow 0$. 由于 $0 \in \Omega^\circ$, $x_\varepsilon \in \partial\Omega_\varepsilon \subset \partial\Omega$, 我们得到一个矛盾, 因而 λ_ε 有界. 不妨假设 $\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0$, 那么 $\lambda_0 \geqslant 1$. 于是由式 (4.2.3) 又得

$$x_\varepsilon = \frac{1}{\lambda_\varepsilon} f_\varepsilon(x_\varepsilon) \longrightarrow \frac{1}{\lambda_0} y_0 := x_0 \in \partial\Omega.$$

把式 (4.2.3) 改写成

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon) + f(x_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon x_\varepsilon,$$

由于 $f_\varepsilon(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon) \longrightarrow 0$, f 连续, 我们有

$$f(x_0) = \lambda_0 x_0.$$

这与式 (4.2.1) 矛盾.

定义 $f_\varepsilon(x, t) = t f_\varepsilon(x) - x$. 由式 (4.2.2) 知,

$$f_\varepsilon(x,t) \neq 0, \quad \forall\, t \in [0,1],\ x \in \partial\Omega_\varepsilon.$$

利用 Brouwer 度的同论不变性得 $\deg(f_\varepsilon(\cdot,1), \Omega_\varepsilon, 0) \neq 0$. 故存在 $x_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$, 使得

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

同上可证, 存在 $x_0 \in \Omega$, 使得 $x_\varepsilon \longrightarrow x_0$, $f(x_0) = x_0$. 证毕.

如果把定理 4.2.3 放在下一节, 直接利用 Leray-Schauder 度的同论不变性, 只需要最后一步的证明. 我们把它放在这里的目的, 是为了进一步强调一致逼近方法的应用.

4.2.2　Leray-Schauder 度

假设 $\Omega \subset X$ 是有界开集, $K:\ \bar{\Omega} \longrightarrow X$ 是紧的, $\phi = I - K$, $y_0 \notin \phi(\partial\Omega)$. 我们希望定义度 $\deg(\phi, \Omega, y_0)$, 使之具有有限维空间上的 Brouwer 度的性质. 首先注意, 如果 S 是一个有界闭集, 则 $\phi(S) = (I-K)(S)$ 是闭的. 事实上, 设 $x_n \in S$, $\phi(x_n) \longrightarrow y$, 即 $x_n - Kx_n \longrightarrow y$. 因为 K 是紧的, 故存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛子列仍记为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $Kx_n \longrightarrow z$. 于是 $x_n \longrightarrow y + z := x \in S$ 且 $x - Kx = y$, 即 $y = \phi(x) \in \phi(S)$.

因此 $\phi(\partial\Omega)$ 是闭的, 所以当 $y_0 \notin \phi(\partial\Omega)$ 时, $d(y_0, \phi(\partial\Omega)) = \delta > 0$, 取 $0 < \varepsilon < \delta/2$, K_ε 是 K 的一个 ε-逼近, K_ε 的像集属于有限维空间 $N_\varepsilon \ni y_0$, 那么 $\phi_\varepsilon(x) = x - K_\varepsilon x \neq y_0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立. 考虑映射

$$\phi_\varepsilon|_{N_\varepsilon \cap \bar{\Omega}}:\ N_\varepsilon \cap \bar{\Omega} \longrightarrow N_\varepsilon,$$

那么度 $\deg(\phi_\varepsilon, N_\varepsilon \cap \Omega, y_0)$ 有定义. 我们将证明这个度不依赖于这样的 $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < \delta/2)$. 事实上, 对任意的 $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \delta/2$, 设 K_{ε_1} 和 K_{ε_2} 的像集分别属于有限维空间 N_{ε_1} 和 N_{ε_2}. 我们定义

$$\phi_t^* = t\phi_{\varepsilon_1} + (1-t)\phi_{\varepsilon_2} = I - [tK_{\varepsilon_1} + (1-t)K_{\varepsilon_2}],$$

那么 $\phi_t^*(x) \neq y_0$, $\forall\, x \in \partial\Omega$. 取 $M = N_{\varepsilon_1} \oplus (N_{\varepsilon_2} \backslash N_{\varepsilon_1}) = N_{\varepsilon_2} \oplus (N_{\varepsilon_1} \backslash N_{\varepsilon_2})$, 则有

$$\phi_t^*|_{M\cap\Omega}:\ M \cap \bar{\Omega} \longrightarrow M.$$

由同伦不变性, $\deg(\phi_0^*, M \cap \Omega, y_0) = \deg(\phi_1^*, M \cap \Omega, y_0)$, 即

$$\deg(\phi_{\varepsilon_1}, M \cap \Omega, y_0) = \deg(\phi_{\varepsilon_2}, M \cap \Omega, y_0).$$

利用定理 4.1.15 又知

$$\deg(\phi_{\varepsilon_i}, M \cap \Omega, y_0) = \deg(\phi_{\varepsilon_i}, N_{\varepsilon_i} \cap \Omega, y_0), \quad i = 1,\ 2,$$

于是 $\deg(\phi_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_1} \cap \Omega, y_0) = \deg(\phi_{\varepsilon_2}, N_{\varepsilon_2} \cap \Omega, y_0)$.

定义 4.2.2 假设 $\Omega \subset X$ 是有界开集, $K: \bar{\Omega} \longrightarrow X$ 是紧的, $\phi = I - K$, $y_0 \notin \phi(\partial\Omega)$. 取 $0 < \varepsilon < \delta/2$, 定义 ϕ 在 y_0 处的 Leray-Schauder 度 (仍然沿用 Brouwer 度的记号) $\deg(\phi, \Omega, y_0) = \deg(\phi_\varepsilon, N_\varepsilon \cap \Omega, y_0)$.

注 4.2.1 若 $y_0 \notin \phi(\bar{\Omega})$, 则度 $\deg(\phi, \Omega, y_0) = 0$. 事实上, 因为 $\phi(\bar{\Omega})$ 是闭的, 所以 $d\big(y_0, \phi(\bar{\Omega})\big) = \delta > 0$. 再用有限维映射 ϕ_ε 逼近 ϕ, 使得 $\phi_\varepsilon: N_\varepsilon \cap \Omega \longrightarrow N_\varepsilon$ 并且 $y_0 \notin \phi_\varepsilon(\overline{N_\varepsilon \cap \Omega})$, 那么

$$\deg(\phi_\varepsilon, N_\varepsilon \cap \Omega, y_0) = 0.$$

把上节中的有限维空间上的 Brouwer 度用于有限维逼近 ϕ_ε, 关于 Brouwer 度的结论对于 ϕ 的 Leray-Schauder 度仍然成立 (参见定理 4.2.2 和 4.2.3 的证明). 特别地, 定理 4.1.1, 定理 4.1.4～4.1.6 和定理 4.1.10, 4.1.14 都成立. 另外, 只要 $K = I - \phi: \partial\Omega \longrightarrow X$ 是紧映射, $y_0 \notin \phi(\partial\Omega)$, 那么度 $\deg(\phi, \Omega, y_0)$ 不依赖于 ϕ 在 Ω 的内部的值. 于是有

定理 4.2.4 拓扑度 $\deg(\phi, \Omega, y_0)$ 仅依赖于 $\phi: \partial\Omega \longrightarrow X \backslash \{y_0\}$ 的同伦类, 这里的同伦是由形如 $\phi_t(x) = x - K_t(x)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 的映射构成, 其中 $K_t: \partial\Omega \times [0,1] \longrightarrow X$ 是紧的.

4.3 隐函数定理

隐函数定理是分析学中的一个重要结论, 是研究非线性方程解的存在唯一性的重要工具. 隐函数定理有多种表述形式, 本节给出其中的两种常用形式.

定理 4.3.1 (隐函数定理) 假设 $U \subset X \times Y$ 是开集, $f: U \longrightarrow Z$ 连续. 又设 f 关于 x 的 Fréchet 导数 $f_x(x, y)$ 存在且在 U 内连续, $(x_0, y_0) \in U$, $f(x_0, y_0) = 0$. 如果 $\mathcal{A} = f_x(x_0, y_0)$ 是 X 到 Z 上的同构, 则有

(1) 存在球 $B_r(y_0) = \{y: \|y - y_0\| < r\}$ 和唯一的连续映射 $u: B_r(y_0) \longrightarrow X$, 满足 $u(y_0) = x_0$, 并且 $f(u(y), y) = 0$ 在 $B_r(y_0)$ 内成立;

(2) 如果又有 $f \in C^1$, 则 $u \in C^1$, 并且

$$u_y(y) = -[f_x(u(y), y)]^{-1} f_y(u(y), y);$$

(3) 更进一步, 如果 $f \in C^p$, $p > 1$, 则 $u \in C^p$.

证明 先证结论 (1). 不妨认为 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. 方程 $f(x, y) = 0$ 可以写成

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}x - f(x, y) \equiv R(x, y),$$

或者

$$x = x - \mathcal{A}^{-1} f(x, y) \equiv \mathcal{A}^{-1} R(x, y) \equiv g(x, y).$$

我们将证明: 对于适当选取的 $r,\delta>0$, 和每一个固定的 $y\in B_r(0)$, 映射 $g(x,y): B_\delta(0)\longrightarrow B_\delta(0)$ 是严格压缩映射. 这样对每一个 $y\in B_r(0)$, 都存在唯一的 $x:=u(y)\in B_\delta(0)$, 满足 $g(u(y),y)=u(y)$, 即 $f(u(y),y)=0$.

取 $\varepsilon>0$, 使 $\varepsilon\|\mathcal{A}^{-1}\|\leqslant 1/2$ (由 Banach 逆算子定理知, $\mathcal{A}^{-1}$ 存在且有界). 我们先证明当 $x_1,x_2\in B_\delta(0)$, $y\in B_r(0)$ 时, 有

$$\|R(x_1,y)-R(x_2,y)\|\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|.$$

事实上,

$$\begin{aligned}R(x_1,y)-R(x_2,y)&=\mathcal{A}x_1-\mathcal{A}x_2-f(x_1,y)+f(x_2,y)\\&=\mathcal{A}(x_1-x_2)-\left(\int_0^1 f_x(tx_1+(1-t)x_2,y)\mathrm{d}t\right)(x_1-x_2)\\&=\left(\mathcal{A}-\int_0^1 f_x(tx_1+(1-t)x_2,y)\mathrm{d}t\right)(x_1-x_2)\\&=\int_0^1\left[f_x(0,0)-f_x(tx_1+(1-t)x_2,y)\right]\mathrm{d}t(x_1-x_2).\end{aligned}$$

因为 $f_x(x,y)$ 连续, 可取 r 和 δ 都很小, 使

$$\|f_x(0,0)-f_x(x,y)\|<\varepsilon,\quad\forall\ \|x\|\leqslant\delta,\ \|y\|\leqslant r.$$

于是当 $\|y\|\leqslant r$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\|R(x_1,y)-R(x_2,y)\|\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|,\\&\|g(x_1,y)-g(x_2,y)\|\leqslant\varepsilon\|\mathcal{A}^{-1}\|\cdot\|x_1-x_2\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

这说明对于每一个 $y\in B_r(0)$, 映射 $g(\cdot,y)$ 关于 $x\in B_\delta(0)$ 是严格压缩的.

其次证明 $g(\cdot,y): B_\delta(0)\longrightarrow B_\delta(0)$. 因为 $g(0,0)=0$ 且 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 所以存在 $r>0$ 使得不等式 (4.3.1) 成立, 并且

$$\|g(0,y)\|\leqslant\delta/2,\quad\forall\ y\in B_r(0).$$

因此

$$\|g(x,y)\|\leqslant\|g(0,y)\|+\frac{1}{2}\|x\|\leqslant\delta,\quad\forall\ x\in B_\delta(0),\ y\in B_r(0).$$

利用压缩映像原理知, 对每一个 $y\in B_r(0)$, 唯一存在 x, 记为 $u(y)$, 使

$$\|u(y)\|=\|x\|\leqslant\delta,\qquad f(u(y),y)=0.$$

由式 (4.3.1) 知, 当 $y_1,y_2\in B_r(0)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|u(y_1)-u(y_2)\|&=\|g(u(y_1),y_1)-g(u(y_2),y_2)\|\\&\leqslant\|g(u(y_1),y_1)-g(u(y_2),y_1)\|+\|g(u(y_2),y_1)-g(u(y_2),y_2)\|\\&\leqslant\tfrac{1}{2}\|u(y_1)-u(y_2)\|+\|g(u(y_2),y_1)-g(u(y_2),y_2)\|,\end{aligned}$$

即

$$\|u(y_1)-u(y_2)\| \leqslant 2\|g(u(y_2),y_1)-g(u(y_2),y_2)\|.$$

由此得 $u(y)$ 的连续性.

为了证明结论 (2), 我们考虑 $y+\Delta y$ (这里 $\|y+\Delta y\| \leqslant r$). 因为 u 关于 $\|y\| \leqslant r$ 连续, 所以当 $\Delta y \longrightarrow 0$ 时,

$$\Delta u := u(y+\Delta y)-u(y) \longrightarrow 0.$$

根据 f 的可微性, 当 $\|\Delta y\|$ 适当小时,

$$\begin{aligned}&\|f(u(y+\Delta y),y+\Delta y)-f(u(y),y)-f_x(u(y),y)\Delta u-f_y(u(y),y)\Delta y\|\\ \leqslant&\ \varepsilon(\|\Delta u\|+\|\Delta y\|).\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

由于

$$f(u(y+\Delta y),y+\Delta y)=f(u(y),y)=0,$$

利用不等式 (4.3.2) 便可推知, 当 $\|\Delta y\|$ 适当小时,

$$\|f_x(u(y),y)\Delta u+f_y(u(y),y)\Delta y\| \leqslant \varepsilon(\|\Delta u\|+\|\Delta y\|). \tag{4.3.3}$$

因为当 $y \longrightarrow 0$ 时, $f_x(u(y),y) \longrightarrow f_x(0,0)$, 并且 $[f_x(0,0)]^{-1}$ 有界, 所以当 $\|y\|$ 适当小时, $[f_x(u(y),y)]^{-1}$ 存在也有界. 这样由不等式 (4.3.3) 便推出

$$\|\Delta u+[f_x(u(y),y)]^{-1}f_y(u(y),y)\Delta y\| \leqslant C\varepsilon(\|\Delta u\|+\|\Delta y\|).$$

令 $v=[f_x(u(y),y)]^{-1}f_y(u(y),y)$, 我们有

$$\|\Delta u+v\Delta y\| \leqslant C\varepsilon(\|\Delta y\|+\|\Delta u+v\Delta y\|+\|v\Delta y\|).$$

取 ε 适当小, 使 $C\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, 则有

$$\|\Delta u+v\Delta y\| \leqslant 2C\varepsilon(\|\Delta y\|+\|v\Delta y\|) \leqslant C_1\varepsilon\|\Delta y\|.$$

这说明 $u(y)$ 在 y 点可导, 并且有

$$u_y(y)=-v=-[f_x(u(y),y)]^{-1}f_y(u(y),y). \tag{4.3.4}$$

因为 $f \in C^1$, 所以式 (4.3.4) 的右端关于 y 是连续的, 故 $u \in C^1$. 如果 $f \in C^2$, 那么式 (4.3.4) 的右端是 C^1 的, 因此 $u \in C^2$. 用归纳法可证结论 (3). 证毕.

推论 4.3.1　假设 f 是 C^p 映射, $p \geqslant 1$, $x_0 \in X$, f 把 x_0 的邻域映入 Y, $y_0 = f(x_0)$, 并且 $f_x(x_0)$ 是到 Y 上的同构. 那么存在球 $B_r(y_0)$, 使得对每个 $y \in B_r(y_0)$, 方程

$$f(x) = y$$

有唯一解 $x = u(y) \in C^p$, 且满足 $x_0 = u(y_0)$.

定理 4.3.2 (单值性)　假设 $f: X \longrightarrow Y$ 是 C^1 的, 对每一个 $x \in X$, 映射 $f_x^{-1}(x)$ 存在且范数一致有界. 那么 f 是 X 到 Y 上的一个同胚.

证明　因为对每一个 $x \in X$, 映射 $f_x^{-1}(x)$ 存在, 所以 $f: X \longrightarrow f(X)$ 是可逆的. 又因为 $f \in C^1$, 故 f 是 X 到 $f(X)$ 上的一个同胚. 为证定理的结论, 只需证明 $f(X) = Y$.

假设 $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2$, 那么

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f_x(\bar{x})(x_2 - x_1).$$

由于 $f_x^{-1}(\bar{x})$ 存在且范数一致有界, 从上式推得

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant C\|y_2 - y_1\|, \tag{4.3.5}$$

其中 $C = \sup_{x\in X} \|f_x^{-1}(x)\|$. 我们断言, 对于任意的 $y \in Y \setminus f(X)$, 存在 $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, 使得 $\overline{B_\varepsilon(y)} \cap f(X) = \varnothing$. 这说明 $f(X)$ 是闭集.

用反证法证明上面的断言. 假设存在 $y_n \in \overline{B_{1/n}(y)} \cap f(X)$ 以及 $x_n \in X$, 满足 $f(x_n) = y_n$. 那么, $y_n \longrightarrow y$. 利用式 (4.3.5) 又知

$$\|x_n - x_m\| \leqslant C\|y_n - y_m\|,$$

这说明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的基本列. 所以存在 $x \in X$, 使得 $x_n \longrightarrow x$. 在 $f(x_n) = y_n$ 中令 $n \longrightarrow \infty$, 根据 f 的连续性便得 $f(x) = y$. 此与 $y \notin f(X)$ 矛盾.

对每一个 $y \in f(X)$, 根据隐函数定理, 存在 $r = r(y) > 0$, 使得 $\overline{B_r(y)} \subset f(X)$. 这说明 $f(X)$ 是开集, 进而推出 $f(X)$ 是全空间, 即 Y. 定理得证.

对于一个给定的算子 $\mathcal{A}$, 我们分别用 $\mathscr{N}(\mathcal{A})$ 和 $\mathscr{R}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的核空间 (零空间) 和值域. 有时又分别简写成 $\mathscr{N}\mathcal{A}$ 和 $\mathscr{R}\mathcal{A}$. 经常用到的隐函数定理是下面的形式.

定理 4.3.3　假设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的邻域内是 $X \times Y \longrightarrow Z$ 的 C^p 映射, $p \geqslant 1$, 并满足:

(1) $f(0, 0) = 0$;

(2) $\mathscr{R} f_x(0, 0) = Z$;

(3) $\mathscr{N} f_x(0,0)=X_1$ 在 X 内有闭的补空间, 即 $X=X_1\oplus X_2$.
那么存在 $\delta, r>0$, 当 $\|x_1\|\leqslant\delta$ $(x_1\in X_1)$ 以及 $\|y\|\leqslant r$ $(y\in Y)$ 时, 方程

$$f(x_1+x_2,y)=0$$

有唯一解 $x_2=u(x_1,y)\in C^p$ 并且满足 $u(0,0)=0$.

证明 令 $\widetilde{Y}=X_1\times Y$, 即 $\tilde{y}=(x_1,y)$, 把 $x=x_1+x_2$ 写成 $x=(x_1,x_2)$. 按照定义,

$$\|f(0,x_2,0)-f(0,0,0)-f_x(0,0,0)(0,x_2)\|=o(\|x_2\|),$$

这说明 $f_x{'}0,0,0)|_{X_2}=f_{x_2}(0,0,0): X_2\longrightarrow Z$. 因为 $f_x(0,0,0)|_{X_2}$ 是 X_2 到 Z 上的同构, 所以 $f_{x_2}(0,0,0)$ 是 X_2 到 Z 上的同构. 定义

$$G(x_2,\tilde{y})=f(x_1,x_2,y)=f(x_1+x_2,y),$$

它是从 $X_2\times\widetilde{Y}$ 的原点的邻域到 Z 的映射. 运用隐函数定理于映射 $G(x_2,\tilde{y})$ 知, 定理的结论成立. 证毕.

4.4 孤立解处的度 —— 不动点指数

设 $\Omega\subset X$ 是有界开集, $\phi:\bar{\Omega}\longrightarrow X$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\phi\neq 0$, $\phi\in C^1(\Omega)$, 并且算子 $K:=I-\phi$ 是紧的. 假设 $x_0\in\Omega$ 是 $\phi=0$ 的一个孤立解, 且 $\mathcal{A}=\phi'(x_0)$ 是可逆的. 取 $\varepsilon>0$ 很小, 使得在 $B_\varepsilon(x_0)$ 内方程 $\phi=0$ 只有一个解 x_0. 由引理 1.1.1 知, $T=K'(x_0)$ 是紧的. 根据切除性质, 存在 $\varepsilon_0>0$, 当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时度 $\deg(\phi,B_\varepsilon(x_0),0)$ 与 ε 无关. 这个常数就称为 ϕ 在点 x_0 处的指数或零点指数, 也称为 $I-\phi$ 在不动点 x_0 处的不动点指数, 通常记为 $\operatorname{index}(I-\phi,x_0)$.

令 $\{\lambda\}$ 是 T 的所有大于 1 的特征值的集合. 由于 $I-T=\mathcal{A}$ 是可逆的, 故 1 不是 T 的特征值. 设 λ 是 T 的一个大于 1 的特征值, 即 $\mathcal{A}$ 的一个负特征值, m_λ 是 λ 的代数重数:

$$m_\lambda=\dim\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-T)^i\right).$$

由 Riesz-Schauder 关于线性紧算子的结论知, m_λ 是有限数. 又因为 T 是紧算子, 所以 T 的大于 1 的特征值最多有有限个.

定理 4.4.1 (Leray-Schauder 定理) 在上述条件下,

$$\operatorname{index}(I-\phi,x_0)=\deg(\phi,B_\varepsilon(x_0),0)=(-1)^\beta,\quad \beta=\sum_{\lambda>1}m_\lambda.$$

证明　可设 $x_0 = 0$. 利用 K 与 T 之间的同伦变形 $\frac{1}{t}K(tx)$, $0 < t \leqslant 1$, 可以证明

$$\deg(I-K, B_\varepsilon, 0) = \deg(I-T, B_\varepsilon, 0),$$

这里 $B_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$. 记 T 的大于 1 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 而 X_1 为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量生成的子空间. 分解 $X = X_1 \oplus X_2$, 那么 X_i 在 T 的作用下是不变的. 利用度的乘积定理得

$$\deg(I-T, B_\varepsilon, 0) = \deg\big((I-T)|_{X_1}, B_\varepsilon \cap X_1, 0\big) \times \deg\big((I-T)|_{X_2}, B_\varepsilon \cap X_2, 0\big).$$

由于在 $B_\varepsilon \cap X_2$ 上, $I - tT$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $I - T$ 与恒同映射 I 之间的同伦, 故 $\deg\big((I-T)|_{X_2}, B_\varepsilon \cap X_2, 0\big) = 1$, 从而

$$\deg(I-T, B_\varepsilon, 0) = \deg\big((I-T)|_{X_1}, B_\varepsilon \cap X_1, 0\big).$$

简记 λ_i 的代数重数为 m_i. 再分解 $X_1 = \bigoplus_{i=1}^{k} X_1^i$, 其中 X_1^i 是 λ_i 对应的特征子空间, 其维数是 m_i. 那么限制在 X_1^i 上, $I-T$ 与一个以 $1-\lambda_i$ 为特征根的 m_i 阶约当矩阵相对应, 因此 $\deg\big((I-T)\big|_{X_1^i}, B_\varepsilon \cap X_1^i, 0\big) = (-1)^{m_i}$. 由于 $(I-T)\big|_{X_1}$ 可以写成

$$(I-T)\big|_{X_1} = (I-T)\big|_{X_1^1} \times \cdots \times (I-T)\big|_{X_1^k},$$

根据度的乘积定理便可推得

$$\begin{aligned}\deg\big((I-T)|_{X_1}, B_\varepsilon \cap X_1, 0\big) &= \prod_{i=1}^{k} \deg\big((I-T)\big|_{X_1^i}, B_\varepsilon \cap X_1^i, 0\big) \\ &= \prod_{i=1}^{k} (-1)^{m_i} = (-1)^{\beta}.\end{aligned}$$

定理得证.

从上面的证明可以看出, $\operatorname{index}(I-\phi, x_0) = \deg(I-\phi'(x_0), B_\varepsilon, 0)$, 所以后者不依赖于 $(0, \varepsilon_0]$ 中的 ε. 因此, 又可以把它写成 $\operatorname{index}(I-\phi'(x_0), 0)$.

4.5 分支理论

考虑方程

$$f(x, \lambda) = 0,$$

其中 f 依赖于参数 λ (可以是单参数也可以是多参数). 有时候, 当参数 λ 变化时, 会出现一簇"好"解 $x(\lambda)$. 这簇解会在 λ 的某个临界值 λ_0 处消失, 或者分成几支. 这种现象就称为分支.

本节的目的是研究解的分支. 我们总假设 $f \in C^p$, $p \geqslant 1$, 并且 f 在点 (x_0, λ_0) 处是 Fredholm 型的, 即

$$\begin{cases} \mathscr{N} f_x(x_0, \lambda_0) = X_1 \text{ 是有限维的, 维数记为 } d, \\ \mathscr{R} f_x(x_0, \lambda_0) = Y_1 \text{ 是闭的, 余维数有限.} \end{cases} \tag{4.5.1}$$

4.5.1 Lyapunov-Schmidt 过程

设 X, Λ, Y 是三个 Banach 空间, Λ 看作参数空间, $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$, $f(x, \lambda)$ 是从 (x_0, λ_0) 的邻域到 Y 的一个 C^p 映射 $(p \geqslant 1)$, 满足 $f(x_0, \lambda_0) = 0$. 我们研究方程 $f(x, \lambda) = 0$ 在点 (x_0, λ_0) 附近的解.

不妨假设 $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$. 分解 $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$, 其中 $\dim Y_2 < \infty$. 记 Q 是到 Y_1 上的投影, 把 Q 和 $I - Q$ 作用于 $f(x, \lambda) = 0$, 就得到等价的方程组

$$Q f(x, \lambda) = 0, \quad (I - Q) f(x, \lambda) = 0.$$

利用分解 $X = X_1 \oplus X_2$ 易知, $f_x(0,0,0) = f_{x_1}(0,0,0) \oplus f_{x_2}(0,0,0)$. 把定理4.3.3 用于映射

$$Qf(x_1 + x_2,\ \lambda): X_1 \times (X_2 \times \Lambda) \longrightarrow Y_1,$$

就得到方程

$$Qf(x_1 + x_2, \lambda) = 0$$

在 0 点附近的唯一解 $x_2 = u(x_1, \lambda)$. 由此知, $x_1 + u(x_1, \lambda)$ 是方程 $f(x, \lambda) = 0$ 的解当且仅当

$$(I - Q) f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda) = 0. \tag{4.5.2}$$

因为 $(I - Q)$ 的值域是有限维的, 方程 (4.5.2) 就称为分支方程, 它是由有限个方程式构成的方程组. 如果参数空间 Λ 也是有限维的, 那么研究方程 $f(x, \lambda) = 0$ 的解就转化为研究具有有限个未知函数的有限方程组.

4.5.2 Morse 引理

我们只叙述并证明广义 Morse 引理. 在下面的广义 Morse 引理中, 如果 F 不依赖于 y, 取 $x(y) = 0$ 即是经典的 Morse 引理.

引理 4.5.1 (广义 Morse 引理) 设 $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^k$, 实函数 $F(x,y)\in C^p$, $p\geqslant 2$, 并且满足 $F_x(0,0)=0$, $Q:=F_{xx}(0,0)$ 非退化. 那么在原点的邻域内存在一个 C^p 函数 $x(y)$, 满足 $x(0)=0$ 和

$$F_x(x(y),y)=0, \tag{4.5.3}$$

以及一个 C^{p-2} 的函数 $\xi=\xi(x,y)$, 其值域属于 $\mathbb{R}^d$, 并且可以写成

$$\xi(x,y)=x-x(y)+o(|x-x(y)|^2)$$

的形式, 使得

$$F(x,y)=F\big(x(y),y\big)+\frac{1}{2}\big(Q(y)\xi,\xi\big),\quad \text{其中 } Q(y)=F_{xx}|_{x=x(y)}. \tag{4.5.4}$$

证明 由隐函数定理得问题 (4.5.3) 的解 $x(y)$ 的存在性. 如果用 $x-x(y)$ 代替 x, 可以认为 $x(y)=0$, 即 $F_x(0,y)=0$ 在 $y=0$ 的邻域内成立.

我们期望找到一个形如 $\xi=Rx$ 的 ξ, 使得式 (4.5.4) 成立, 其中 $R=R(x,y)$ 是一个 d 阶方阵, 满足 $R(0,y)=I$. 记 R^* 是 R 的转置矩阵, 那么式 (4.5.4) 成立当且仅当

$$\frac{1}{2}\big(R^*Q(y)Rx,x\big)=F(x,y)-F(0,y).$$

利用

$$F(x,y)-F(0,y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(tx,y)\mathrm{d}t=\int_0^1F_x(tx,y)x\mathrm{d}t$$

及分部积分推得

$$\begin{aligned}F(x,y)-F(0,y)&=tF_x(tx,y)x\big|_0^1-\int_0^1t\big(F_{xx}(tx,y)x,x\big)\mathrm{d}t\\&=F_x(x,y)x-\int_0^1t\big(F_{xx}(tx,y)x,x\big)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_x(tx,y)x\mathrm{d}t-\int_0^1t(F_{xx}(tx,y)x,x)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\big(F_{xx}(tx,y)x,x\big)\mathrm{d}t-\int_0^1t\big(F_{xx}(tx,y)x,x\big)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1(1-t)\big(F_{xx}(tx,y)x,x\big)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\big(B(x,y)x,x\big),\end{aligned}$$

这里$B(x,y)=2\displaystyle\int_0^1(1-t)F_{xx}(tx,y)\mathrm{d}t$. 由于 $B(x,y)$ 是一个对称矩阵, 我们希望找

一个 R 满足

$$R^*Q(y)R = B(x,y), \quad R(0,y) = I. \tag{4.5.5}$$

我们将利用隐函数定理来求解问题 (4.5.5). 因为在 $x=0$ 点, $B(0,y)=Q(y)$, 所以只要 $R(0,y)=I$, 式 (4.5.5) 在 $x=0$ 点成立. 取 X 是所有 d 阶矩阵构成的子空间, Z 是所有 d 阶对称矩阵构成的子空间, $Y=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^k$,

$$f(R,\, x,\, y) = R^*Q(y)R - B(x,y).$$

显然有 $f: X\times Y\longrightarrow Z$. 若令

$$R = I+P, \quad G(P,\, x,\, y) = (I+P)^*Q(y)(I+P) - B(x,y),$$

那么

$$G: X\times Y\longrightarrow Z, \quad G(0,0,0)=0,$$

并且

$$G_P(0,0,0): P\longrightarrow P^*Q+QP$$

是 $X\longrightarrow Z$ 的满射. 事实上, 对于任意的 $S\in Z$, 矩阵 $P=\dfrac{1}{2}Q^{-1}S$ 满足 $P^*Q+QP=S$, 即 $\mathscr{R}G_P(0,0,0)=Z$. 因为 X 是有限维的, 所以 $\mathscr{N}G_P(0,0,0)$ 在 X 中有闭的补空间. 利用隐函数定理 4.3.3, 对于 $0\in\mathscr{N}G_P(0,0,0)$, 存在一个定义在 $(x,y)=(0,0)$ 的邻域内的 C^{p-2} 函数 $P(x,y)\in X$, 满足 $P(0,0)=0$, $G(P,\, x,\, y)=0$, 故存在 $R(x,y)$ 满足式 (4.5.5). 证毕.

4.5.3 Morse 引理的应用

假设 f 满足式 (4.5.1), $x_0=0$ 并且 $f(0)=0$. 又设 $\mathrm{Codim}Y_1=1$, 即存在 $y^*\in Y^*$, $y^*\neq 0$, 使得

$$Y_1=\{y\in Y: y^*(y)=0\}.$$

定理 4.5.1 设 $f\in C^p$, $p\geqslant 2$, f 在 X_1 上的限制满足

$$d \text{ 阶对称矩阵 } y^*f_{x_1x_1}(0) \text{ 是非退化的, 不定的.} \tag{4.5.6}$$

那么在原点的邻域内, 方程 $f(x)=0$ 的解集合由一个顶点在原点的 $d-1$ 维变形锥构成. 特别地, 如果 $d=2$, 则解集合由两条在原点交叉的 C^{p-2} 类曲线构成 (如果 $p>2$, 这两条曲线在原点横截). 如果 $y^*f_{x_1x_1}(0)$ 是定型的 (正定的或负定的), 那么 $x=0$ 是方程 $f(x)=0$ 的唯一局部解.

证明 在 4.5.1 节我们已经说明, 方程 $f(x)=0$ 等价于分支问题

$$F(x_1)\equiv y^*f\big(x_1+x_2(x_1)\big)=0.$$

把 Morse 引理用于 $F(x_1)$ 可得所要的结论. 事实上, 此时的 $x_1(y)=0$. 因为 $F(0)=0$, 所以式 (4.5.4) 成为

$$F(x_1)=\frac{1}{2}\big(F_{x_1x_1}(0)\xi,\xi\big).$$

因此求解方程 $f(x)=0$ 等价于求解

$$\frac{1}{2}\big(F_{x_1x_1}(0)\xi,\xi\big)=0. \tag{4.5.7}$$

由于 $F_{x_1x_1}(0)=y^*f_{x_1x_1}(0)$ (见下面的结论 (b)), 而 $y^*f_{x_1x_1}(0)$ 是 d 阶非退化的不定型矩阵, 所以 $(F_{x_1x_1}(0)\xi,\xi)$ 是非退化的不定型二次型. 故定理的结论成立.

下面验证 Morse 引理的条件, 即

(a) $F_{x_1}(0)=0$,

(b) $F_{x_1x_1}(0)=y^*f_{x_1x_1}(0)$.

我们知道, $x_2(x_1)$ 是方程

$$Qf\big(x_1+x_2(x_1)\big)=0,\quad x_2(0)=0$$

的解. 在 $x_1=0$ 处关于 x_1 求导数得

$$Qf_x(0)\big(x_1+x_2'(0)x_1\big)=0.$$

因为 $f_x(0)x_1=0$, Q 是到 $\mathscr{R}f_x(0)$ 的投影, 所以

$$f_x(0)x_2'(0)x_1=0.$$

注意到 $f_x(0)$ 是 X_2 上的一个同构, $x_2'(0)x_1\in X_2$, 故有 $x_2'(0)x_1=0$, 即

$$x_2'(0)=0. \tag{4.5.8}$$

利用 $y^*f_{x_1}(0)=0$ 又得

$$F_{x_1}(0)=y^*f_{x_1}(0)=0,\quad F_{x_1x_1}(0)=y^*f_{x_1x_1}(0).$$

定理得证.

注 4.5.1　*当 $d=2$ 时, 由 Morse 引理及式 (4.5.8) 可以推出, 这两条解曲线在原点的切线都落在平面 X_1 上, 因此切线的方向 ν 满足 $y^*\big(f_{x_1x_1}(0)(\nu,\nu)\big)=0$.*

事实上,

$$y^*f\big(x_1+x_2(x_1)\big)=0\Longleftrightarrow f\big(x_1+x_2(x_1)\big)=0.$$

在 $x_1=0$ 处求导可知, 在原点处的切线 $(1,x_2'(0))=(1,0)$ 满足 $f_x(0)(1,x_2'(0))^{\mathrm{T}}=0$, 即落在 X_1 平面上. 利用

$$y^*\big(f_{x_1x_1}(0)(\xi(x_1),\xi(x_1))\big)=0$$

(见式 (4.5.7)) 以及 $\xi(x_1) = x_1 + o(|x_1|^2)$, 便可推出 $y^*(f_{x_1x_1}(0)(\nu,\nu)) = 0$.

下面假设 $f(x,\lambda) \in C^p$, $p \geqslant 1$, $f(x,\lambda)$ 把点 $(0,\lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ 的某个邻域映入 Y, 并且满足

$$f(0,\lambda_0) = 0.$$

定义 4.5.1 点 $(0,\lambda_0)$ 称为一个分支点, 如果 $(0,\lambda_0)$ 的任一邻域都包含方程 $f(x,\lambda) = 0$ 的一个解 (x,λ) 并且 $x \neq 0$.

在许多问题中, f 满足

$$f(0,\lambda) \equiv 0. \tag{4.5.9}$$

在这种情况下, 利用隐函数定理可知, 如果 $f_x(0,\lambda_0)$ 是 X 到 Y 上的同构, 那么点 $(0,\lambda_0)$ 不是分支点.

定理 4.5.2 设 $f(x,\lambda) \in C^p$, $p \geqslant 2$, $f(0,\lambda_0) = 0$. 又假设

(1) $f_\lambda(0,\lambda_0) = 0$;

(2) $\mathscr{N} f_x(0,\lambda_0)$ 是一维的, 由 x_0 生成;

(3) $Y_1 := \mathscr{R} f_x(0,\lambda_0)$ 的余维数是 1;

(4) $f_{\lambda\lambda}(0,\lambda_0) \in Y_1$, $f_{\lambda x}(0,\lambda_0)x_0 \notin Y_1$.

那么点 $(0,\lambda_0)$ 是一个分支点, 并且 $f(x,\lambda) = 0$ 的解集合在点 $(0,\lambda_0)$ 的邻域内由两条只在 $(0,\lambda_0)$ 相交的 C^{p-2} 类曲线 Γ_1, Γ_2 构成. 此外, 如果 $p > 2$, 我们还有

Γ_1 在 $(0,\lambda_0)$ 点与 λ 轴相切, 因此可用 λ 参数化:

$$(x(\lambda),\lambda), \quad |\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon.$$

由此推出 $x(\lambda_0) = x'(\lambda_0) = 0$. Γ_2 可用变量 s 参数化:

$$\big(sx_0 + x_2(s), \lambda(s)\big), \quad |s| \leqslant \varepsilon,$$

并满足 $x_2(0) = x'_{2s}(0) = 0$, $\lambda(0) = \lambda_0$.

注 4.5.2 如果式 (4.5.9) 成立, 那么 Γ_1 就是 λ 轴.

定理 4.5.2 的证明 不妨认为 $\lambda_0 = 0$. 令

$$\hat{X} = X \times \mathbb{R}, \quad f(x,\lambda) = f(\hat{x}),$$

则有

$$f_{\hat{x}}(0) = f_x(0,0) \oplus f_\lambda(0,0).$$

由条件 (1) 和 (2) 知, $\mathscr{N} f_{\hat{x}}(0)$ 由 $(x_0,0)$ 和 $(0,1)$ 张成, 是二维的. 令 $y^* \neq 0$ 是零化 Y_1 的泛函, 我们断言 $f(\hat{x})$ 满足定理 4.5.1 的条件. 事实上, 只要验证式 (4.5.6)

即可. 此时的二阶矩阵是

$$Q = \begin{pmatrix} y^* f_{xx}(0,0) & y^* f_{x\lambda}(0,0) \\ y^* f_{x\lambda}(0,0) & y^* f_{\lambda\lambda}(0,0) \end{pmatrix}.$$

根据条件 (4) 知

$$y^* f_{\lambda\lambda}(0,0) = 0, \quad y^* f_{x\lambda}(0,0) \neq 0,$$

由此得 $|Q| < 0$, 所以 Q 非退化.

利用定理 4.5.1, 可得两条解曲线 Γ_1 和 Γ_2. 假设 $p \geqslant 3$, 那么 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C^{p-2}$, 且在原点横截. 由附注 4.5.1 及 $y^* f_{\lambda\lambda}(0,0) = 0$ 推知, 有一条解曲线在原点与 λ 轴相切. 证毕.

定理 4.5.3 设 $f(x,\lambda)$ 是一个 C^p 映射, $p \geqslant 2$, $f(0,0) = 0$. 又设

(1) $f_\lambda(0,0) = 0$;

(2) $X_1 = \mathscr{N} f_x(0,0)$ 是 d 维的;

(3) $\mathscr{R} f_x(0,0) = Y_1$, 其余维数是 1;

(4) $f_{\lambda\lambda}(0,0) \in Y_1$;

(5) 存在 $x_0 \in X_1$, 使得 $f_{\lambda x}(0,0)x_0 \notin Y_1$.

则 $(0,0)$ 是 f 的一个分支点. 进一步, 若分解

$$X_1 = \{ax_0\} \oplus X_1', \quad X = \{ax_0\} \oplus X_1' \oplus X_2 = P_1X \oplus P_1'X \oplus P_2X,$$

其中 P_1, P_1' 和 P_2 分别是到 $\{ax_0\}$, X_1' 和 X_2 上的投影. 那么对每一个小的 $x_1' \in X_1'$, 满足 $P_1'x = x_1'$ 的方程 $f(x,\lambda) = 0$ 的解集在原点的附近由两条 C^{p-2} 类曲线构成. 同时, 对于 $p \geqslant 3$ 和每个固定的 x_1', 这两条曲线或者横截相交, 或者看起来像双曲线的两支.

4.5.4 Krasnoselski 定理

Krasnoselski 对于紧算子给出了分支点的一个非常一般的充分条件. 假设 $D \subset X \times \mathbb{R}$, $f(x,\lambda): D \longrightarrow X$,

$$f(x,\lambda) = x - (\mu_0 + \lambda)Tx + g(x,\lambda).$$

又设

(a) $\mu_0 \neq 0$, $(0,\mu_0) \in D$;

(b) $T: X \longrightarrow X$ 是线性紧算子;

(c) $g: D \longrightarrow X$ 是非线性紧算子;

(d) $g(0,\lambda) \equiv 0$, $g(x,\lambda) = o(\|x\|)$ 关于 $|\lambda| < \varepsilon$ 一致成立.

我们希望确定点 $(0,0)$ 是 $f(x,\lambda)=0$ 的分支点的条件. 如果把 $f(x,\lambda)=0$ 写成

$$(I-\mu_0 T)x=\lambda Tx-g(x,\lambda)$$

的形式, 容易看出 $(0,0)$ 是一个分支点的必要条件是 $(I-\mu_0 T)$ 不可逆, 或者说 $1/\mu_0$ 是 T 的一个特征值. 事实上, 如果 $I-\mu_0 T$ 可逆, 那么方程可以写成

$$x=(I-\mu_0 T)^{-1}(\lambda Tx-g(x,\lambda)).$$

对右端作估计可知, $x(\lambda)\equiv 0$ 是它的局部唯一解.

定理 4.5.4 (Krasnoselski) 假设条件 (a)～(d) 成立. 如果 $1/\mu_0$ 是 T 的一个奇数重特征值, 则 $(0,0)$ 是 $f(x,\lambda)=0$ 的一个分支点.

证明 不妨认为 $\mu_0>0$. 如果 $(0,0)$ 不是分支点, 则存在适当小的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$, 使得度

$$\deg\big(f(x,\lambda),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,0\big),\quad |\lambda|<\delta$$

有定义且不依赖于 λ. 同时, 满足 $f(x,\lambda)=0$ 和 $|x|\leqslant\varepsilon$, $|\lambda|<\delta$ 的 (x,λ) 只有 $x=0$. 利用定理 4.4.1 知, 当 $0<\lambda_1<\delta$ 时,

$$\deg\big(f(x,\lambda_1),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,0\big)=(-1)^{\beta(\lambda_1)},$$

其中 $\beta(\lambda)$ 是 T 的所有大于 $1/(\mu_0+\lambda)$ 的特征值的重数之和. 对于 $-\delta<\lambda_2<0$, 有

$$\deg\big(f(x,\lambda_2),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,0\big)=(-1)^{\beta(\lambda_2)}.$$

因为 T 的特征值是离散的, 所以当 $\delta>0$ 很小时, 只要 $0<|\lambda|\leqslant\delta$, 数 $1/(\mu_0+\lambda)$ 一定不是 T 的特征值. 因此 $\beta(\lambda_1)-\beta(\lambda_2)$ 等于 $1/\mu_0$ 的重数, 是奇数. 于是

$$\deg\big(f(x,\lambda_2),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,0\big)=-\deg\big(f(x,\lambda_1),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,0\big).$$

此与 $\deg\big(f(x,\lambda),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,0\big)$ 不依赖于 λ 的事实矛盾. 证毕.

4.5.5 Rabinowitz 定理

定理 4.5.5 假设 $G\subset X\times\mathbb{R}$, $f:G\longrightarrow X$ 连续, 并且可以写成

$$f(x,\mu)=(I-\mu T)x-g(x,\mu)$$

的形式, 同时还满足

(1) $T:X\longrightarrow X$ 是线性紧算子;

(2) $g:G\longrightarrow X$ 是非线性紧算子, $g(x,\mu)=o(\|x\|)$ 在 μ 的任一有界区间上一致成立;

(3) $(0,\mu_0)\in G$, $\mu_0\neq 0$, μ_0^{-1} 是 T 的一个奇数重特征值.

记 S 是方程 $f(x,\mu)=0$ 在 G 内的所有非平凡解 (x,μ) $(x\neq 0)$ 构成的集合的闭包, C 是 S 的包含点 $(0,\mu_0)$ 的一个连通分支. 那么,

(a) C 在 G 中是非紧的 (在 $G=X\times\mathbb{R}$ 的情况下, C 是无界的),

或者

(b) C 包含某些这种点 $(0,\mu_j)$, 其中 μ_j^{-1} 是 T 的特征值, 并且属于 C 的这种点只有有限多个. 进一步还有, 在这些 μ_j 中重数是奇数 (包括 μ_0 在内) 的一共有偶数个.

为证定理 4.5.5, 我们先证明下面的引理.

引理 4.5.2 (Ize) 考虑定理 4.5.5 中的 $f(x,\mu)$. 对于 $\mu=\mu_0+\lambda$, 当 $\lambda\neq 0$, $|\lambda|$ 适当小时, μ^{-1} 不是 T 的特征值. 因此数

$$i_-=\mathrm{index}\,(I-\mu T,0)=\deg\big(I-\mu T,\,\|x\|\leqslant r,\,0\big),\quad \lambda<0$$

关于适当小的 $r=r(\lambda)$ 有定义且不依赖于 r 和 λ $(0<r\ll 1,\,\lambda<0,\,|\lambda|\ll 1)$. 同样, 数

$$i_+=\mathrm{index}\,(I-\mu T,0)=\deg\big(I-\mu T,\|x\|\leqslant r,0\big),\quad \lambda>0$$

有定义且不依赖于 $r=r(\lambda)\ll 1$ 和 $0<\lambda\ll 1$. 对于固定的 $0<r\ll 1$, 在 $(0,0)\in X\times\mathbb{R}$ 点的邻域内考察由

$$\begin{aligned}[I-(\mu_0+\lambda)T]x-g(x,\mu_0+\lambda)&=y,\\ \|x\|^2-r^2&=\tau\end{aligned}$$

确定的映射:

$$H_r(x,\lambda)=(y,\tau),\quad H_r: X\times\mathbb{R}\longrightarrow X\times\mathbb{R}.$$

那么当 $\lambda_0>0, r>0$ 都适当小时, 我们有

$$\deg\big(H_r,\,\|x\|^2+\lambda^2\leqslant r^2+\lambda_0^2,\,(0,0)\big)=i_--i_+.$$

证明 取 $\lambda_0>0$ 充分小, 使得 T 的特征值的倒数属于区间 $[\mu_0-\lambda_0,\,\mu_0+\lambda_0]$ 的只有 μ_0. 于是 $[I-(\mu_0\pm\lambda_0)T]^{-1}$ 存在且有界, 并且方程

$$[I-(\mu_0\pm\lambda_0)T]x-g(x,\mu_0\pm\lambda_0)=0 \tag{4.5.10}$$

满足 $\|x\|\ll 1$ 的解只有 $x=0$. 我们断言, 对于充分小的 $r>0$, 方程 $H_r(x,\lambda)=(0,0)$ 没有满足 $\|x\|^2+\lambda^2=r^2+\lambda_0^2$ 的解. 事实上, 如果 (x,λ) 是一个这样的解, 那么 $\|x\|^2-r^2=0$, 即 $\|x\|^2=r^2$. 于是 $\lambda^2=\lambda_0^2$, 即 $\lambda=\pm\lambda_0$. 这说明 x 是满足 $\|x\|=r\ll 1$ 的方程 (4.5.10) 的解, 因此 $x=0$. 矛盾.

对 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 考虑形变 $H_r^t(x,\lambda) = (y^t, \tau^t)$, 其中

$$y^t = [I - (\mu_0 + \lambda)T]x - tg(x, \mu_0 + \lambda),$$
$$\tau^t = t(\|x\|^2 - r^2) + (1-t)(\lambda_0^2 - \lambda^2).$$

同上,度 $\deg(H_r^t(x,\lambda), \|x\|^2 + |\lambda|^2 \leqslant r^2 + \lambda_0^2, (0,0))$ 有定义, 即在 $\|x\|^2+|\lambda|^2 = r^2+\lambda_0^2$ 上方程 $H_r^t(x,\lambda) = (0,0)$ 没有解, 所以这个度不依赖于 t. 当 $t=0$ 时,

$$H_r^0(x,\lambda) = \big((I - (\mu_0+\lambda)T)x,\ \lambda_0^2 - \lambda^2\big).$$

如果 $H_r^0(x,\lambda) = (0,0)$, 则 $\lambda = \pm\lambda_0$, $x = 0$. 这说明方程 $H_r^0(x,\lambda) = (0,0)$ 只有解 $(0,\lambda_0)$ 和 $(0,-\lambda_0)$. 然而, $H_r^0(x,\lambda)$ 在 $(0,\lambda)$ 处的 Fréchet 导数是

$$DH_r^0(0,\lambda)(x,\lambda') = \big((I-(\mu_0+\lambda)T)x,\ -2\lambda\lambda'\big) = \begin{pmatrix} [I-(\mu_0+\lambda)T]x & 0 \\ 0 & -2\lambda\lambda' \end{pmatrix}.$$

这是一个乘积映射, 它在 $\lambda = \lambda_0$ 的度是 $-i_+$ (因为 $I - (\mu_0+\lambda_0)T$ 的度是 i_+, $-2\lambda_0$ 的度是 -1), 在 $\lambda = -\lambda_0$ 的度是 i_- (因为 $I - (\mu_0 - \lambda_0)T$ 的度是 i_-, $2\lambda_0$ 的度是 1). 因此 $DH_r^0(0,\lambda)(x,\lambda')$ 的度之和为 $i_- - i_+$. 引理得证.

定理 4.5.5 的证明 假设 C 在 G 内是紧的. 因为紧算子的特征值只可能以 0 为聚点, 所以 $\mathbb{R}$ 的任意一个有限区间只可能包含有限多个 T 的特征值的倒数. 因此 C 最多包含有限多个 $(0,\mu_j)$, 其中 μ_j^{-1} 是 T 的特征值, $j = 0,\cdots,k$. 设 Ω 是 $X\times\mathbb{R}$ 中包含 C 的一个有界开集, 在 $\partial\Omega$ 上方程 $f(x,\mu) = 0$ 没有非平凡解 (x,μ), $x \neq 0$, 且 Ω 不包含除 $(0,\mu_j)$ 之外的点 $(0,\mu)$, 其中 μ^{-1} 是 T 的特征值.

对于 $r > 0$, 在 Ω 内考虑映射

$$f_r(x,\mu) = \big(f(x,\mu), \|x\|^2 - r^2\big):\ \bar{\Omega} \longrightarrow X\times\mathbb{R}.$$

由于在 $\partial\Omega$ 上方程 $f(x,\mu) = 0$ 没有非平凡解 (x,μ), $x\neq 0$, 即在 $\partial\Omega$ 上 $f(x,\mu)=0$ 的解只可能是 $(0,\mu)$, 故 $f_r(x,\mu) = (0,0)$ 在 $\partial\Omega$ 上无解, 于是度 $\deg(f_r(x,\mu),\Omega,(0,0))$ 有定义且与 r 无关. 因为当 r 适当大时, $f_r(x,\mu) = (0,0)$ 在 Ω 内无解, 所以度

$$\deg\big(f_r(x,\mu),\Omega,(0,0)\big) = 0, \quad 当\ r \gg 1 时.$$

另一方面, 当 r 适当小时, 如果 $(x,\mu)\in\Omega$ 是 $f_r(x,\mu) = (0,0)$ 的解, 那么 $\|x\| = r$ 适当小. 所以当 $r \longrightarrow 0^+$ 时, μ 靠近于某个 μ_j, $j = 0,1,\cdots,k$ (若不然, $(I-\mu T)^{-1}$ 有界, $x = 0$ 是方程 $f(x,\mu) = 0$ 的唯一解 (局部), 此与 $\|x\| = r > 0$ 矛盾). 注意到 f_r 在 μ_j 的邻域内的度之和为零, 由引理 4.5.2 知, 当 r 和 λ_0 都很小时,

$$0 = \sum_{j=0}^{k} \deg\big(f_r,\ \|x\|^2 + (\mu-\mu_j)^2 \leqslant r^2+\lambda_0^2,\ (0,0)\big) = \sum_{j=0}^{k}[i_-(j) - i_+(j)]. \quad (4.5.11)$$

因为 $i_+(j) = (-1)^{m_j} i_-(j)$, 其中 m_j 是 μ_j 的重数, 所以满足 $i_+(j) \neq i_-(j)$ 的 μ_j 的重数只可能是奇数. 再由式 (4.5.11), 这样的 μ_j 只能有偶数个. 证毕.

4.6 稳 定 性

非线性方程 $f(x) = 0$ 的一个解 x_0, 可以看成发展方程

$$\dot{x} = f(x)$$

的一个平衡态. 一个重要问题是讨论 x_0 的稳定性. 对 x_0 作一个摄动 $x_0 + \Delta x_0$, 考虑初值问题

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 + \Delta x_0$$

的解. 假设该问题是适定的, 即解的存在唯一性成立, 我们想知道这个解 $x(t)$ 是否满足 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_0$. 通过研究线性化问题, 往往可以得到一些答案. 在 x_0 处的线性化问题是

$$\dot{x} = f_x(x_0)x.$$

如果 $f_x(x_0)$ 的谱都位于左半平面 (即实部小于零), 那么当 $t \longrightarrow \infty$ 时, $x(t) - x_0$ 以指数衰减到零. 此时我们说 x_0 是线性稳定的. 如果 $f_x(x_0)$ 的谱包含一些实部为正的点, 则称 x_0 不是线性稳定的. 本节研究由定理 4.5.2 给出的两条 C^{p-2} 类解 (分支解) 曲线 $(x(s) = sx_0 + x_2(s), \lambda(s))$ 和 $(x = \varphi(\sigma), \lambda = \sigma)$ 的线性稳定性, 其中 $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, 而且 0 是 $f_x(0,0)$ 的特征值. 按照定义, 我们只需研究算子 $f_x(x(s), \lambda(s))$ 和 $f_x(\varphi(\sigma), \sigma)$ 的谱结构.

根据连续性, 一般而言当 $|s| \ll 1$ 或者 $|\sigma| \ll 1$ 时, 算子 $f_x(x(s), \lambda(s))$ 或者 $f_x(\varphi(\sigma), \sigma)$ 有一个特征值也在零附近. 不妨假设除了这个特征值之外, 其余的谱都位于左半平面 (如若不然, 立即可得其不稳定性).

定义 4.6.1 (Crandall-Rabinowitz)　设 T_0, K 是 X 到 Y 的有界线性算子, μ_0 称为 T_0 的一个 K- 简单特征值, 如果

(1) $\mathscr{N}(T_0 - \mu_0 K)$ 是一维的, 由 x_0 生成;

(2) $\mathscr{R}(T_0 - \mu_0 K)$ 是闭的, 余维数是 1;

(3) $Kx_0 \notin \mathscr{R}(T_0 - \mu_0 K)$.

推论 4.6.1　如果 $X = Y, K = I, T_0$ 是线性紧算子, 那么 $\mu_0 \neq 0$ 是 T_0 的一个 I- 简单特征值等价于 μ_0 是 T_0 的一个简单特征值.

证明　先设 μ_0 是 T_0 的一个 I- 简单特征值. 如果 μ_0 不是 T_0 的一个简单特征值, 那么存在 $x \notin \{ax_0 : a \in \mathbb{R}\}$, 满足 $(T_0 - \mu_0 I)^2 x = 0$, 即 $(T_0 - \mu_0 I)x \in \mathscr{N}(T_0 - \mu_0 I)$. 根据定义 4.6.1 中的条件 (1) 知, $(T_0 - \mu_0 I)x \neq 0$, 并且存在 $0 \neq b \in \mathbb{R}$ 使得 $(T_0 - \mu_0 I)x = bx_0$. 此与定义 4.6.1 中的条件 (3) 矛盾.

反之, 如果 μ_0 是 T_0 的一个简单特征值 (记 x_0 是对应的特征向量), 那么定义 4.6.1 中的条件 (1) 是显然的. 由于 T_0 是紧算子, 故 $\mathscr{R}(T_0-\mu_0 I)$ 是闭的. 又因为 $T_0-\mu_0 I$ 是指数为零的 Fredholm 算子, 而且 $\dim\mathscr{N}(T_0-\mu_0 I)=1$, 所以 $\mathscr{R}(T_0-\mu_0 I)$ 的余维数是 1. 因此定义 4.6.1 中的条件 (2) 成立.

再证明 $x_0\notin\mathscr{R}(T_0-\mu_0 I)$. 如若不然, 则存在 $x\in X$ 满足 $x_0=(T_0-\mu_0 I)x$. 于是 $(T_0-\mu_0 I)^2x=(T_0-\mu_0 I)x_0=0$. 因为 $x_0\neq 0$, 所以 $x\notin\mathscr{N}(T_0-\mu_0 I)$. 这与 μ_0 是 T_0 的简单特征值的假设相矛盾. 故定义 4.6.1 中的条件 (3) 成立. 证毕.

引理 4.6.1 (Crandall-Rabinowitz) **设 μ_0 是 T_0 的一个 K- 简单特征值. 则存在 $\delta>0$, 当 $\|T-T_0\|<\delta$ 时, T 有唯一的 K- 简单特征值 $\mu(T)$ 满足 $\mu(T_0)=\mu_0$, 对应的特征向量是 $x(T)=x_0+x_2(T)$, $x_2(T)\in X_2$, 其中 $X=\mathrm{span}\{x_0\}\oplus X_2$. 同时 $\mu(T)$, $x(T)$ 是唯一的, 关于 T 解析.**

证明 不妨认为 $\mu_0=0$. 对于 $x(T)=x_0+x_2(T)$, 求解方程

$$(T-\mu(T)K)x(T)=0.$$

考虑映射 $F:(T,\mu,x_2)\longmapsto(T-\mu K)(x_0+x_2)$, $\mu\in\mathbb{R}$. 当 T 靠近 T_0 时, 我们期望利用隐函数定理找出该映射的一个零点. 该映射在 $T=T_0$, $\mu=0$, $x_2=0$ 处关于 μ 和 x_2 的 Fréchet 导数分别是 $F_\mu(T_0,0,0)=-Kx_0$ 和 $F_{x_2}(T_0,0,0)=T_0$. 记 $f=(F_\mu,F_{x_2})|_{(T_0,0,0)}$, 我们有

$$f:\mathbb{R}\times X_2\longrightarrow Y,\qquad f(\mu,x_2)=-\mu Kx_0+T_0x_2.$$

因为 0 是 T_0 的一个 K—简单特征值, 并且

$$Kx_0\notin\mathscr{R}(T_0-\mu_0K)=\mathscr{R}(T_0)=T_0X_2,$$

不难推出

$$f:\mathbb{R}\times X_2\longrightarrow\widetilde{Y}=\{y\in Y:\,y=-\mu Kx_0+T_0x_2,\,x_2\in X_2,\,\mu\in\mathbb{R}\}$$

是满单射, 并且 $\widetilde{Y}$ 是 Y 的闭子空间 (当然是 Banach 空间). 事实上, 若存在 μ, μ' 和 x_2, x_2', 使得 $f(\mu,x_2)=f(\mu',x_2')$, 则有

$$(\mu'-\mu)Kx_0=T_0(x_2'-x_2).$$

由于 $Kx_0\notin T_0X_2$, 故 $\mu'=\mu$, 从而 $T_0(x_2'-x_2)=0$. 又因为 $x_2'-x_2\in X_2$, $X=\mathrm{span}\{x_0\}\oplus X_2$, 所以 $x_2'=x_2$, 即 f 是 1-1 的. 显然 f 是到上的. 利用 $Kx_0\notin T_0X_2$ 以及 $T_0X_2=T_0X$ 是闭的, 可以推出 $\widetilde{Y}=\{Kx_0\}\oplus T_0X_2$ 且是闭的.

利用隐函数定理知, 在 T_0 的邻域内, 存在唯一解析函数 $(\mu(T),\,x_2(T))$ 满足

$$\big(T-\mu(T)K\big)\big(x_0+x_2(T)\big)=0,\quad \mu(T_0)=0,\quad x_2(T_0)=0.$$

为了完成引理的证明, 需要验证 $\mu(T)$ 和 $x_0+x_2(T)$ 满足定义 4.6.1 中的条件 (1)~(3). 先验证条件 (1) 和 (2). 容易看出, 当 T 靠近 T_0 且 μ 很小时, $T-\mu K$ 是指数为零的 Fredholm 算子 ([20, 定理 4.6.7]). 因为零空间的维数是上半连续的, 所以

$$\dim \mathscr{N}(T-\mu K)\leqslant 1.$$

我们已经知道 $(T-\mu(T)K)(x_0+x_2(T))=0$, 故 $\mathscr{N}(T-\mu(T)K)$ 是一维的, 且由 $x_0+x_2(T)$ 生成. 又因为 $T-\mu(T)K$ 是指数为零的 Fredholm 算子, 所以 $\mathscr{R}(T-\mu(T)K)$ 是闭的、余维数是 1. 定义 4.6.1 中的条件 (1) 和 (2) 成立.

再验证定义 4.6.1 中的条件 (3), 即证明 $K(x_0+x_2(T))\notin\mathscr{R}(T-\mu(T)K)$. 事实上, 假设存在

$$x=x(T)=\alpha x_0+\tilde{x}_2,\quad \alpha=\alpha(T)\in\mathbb{R},\quad \tilde{x}_2=\tilde{x}_2(T)\in X_2,$$

使得 $K(x_0+x_2(T))=(T-\mu(T)K)x$, 那么

$$(T-T_0)x-\mu(T)Kx+T_0x=K(x_0+x_2(T)).\tag{4.6.1}$$

不妨认为 $|\alpha(T)|\leqslant 1$ (如果 $|\alpha(T)|>1$, 就用 $x/|\alpha(T)|$ 代替原来的 x). 问题 (4.6.1) 可以等价地写成

$$T_0\tilde{x}_2-\alpha\mu(T)Kx_0=(T_0-T)(\alpha x_0+\tilde{x}_2)+\mu(T)K\tilde{x}_2+K(x_0+x_2(T)).$$

因为上式左端作为 $X_2\times\mathbb{R}$ 上的线性算子是到 $\widetilde{Y}$ 上的同构, 于是当 $T-T_0$ 很小时, 存在不依赖于 T 的常数 C 使得

$$\|\tilde{x}_2\|+|\alpha\mu(T)|\leqslant C\big[\|T_0-T\|(|\alpha|+\|\tilde{x}_2\|)+|\mu(T)|\,\|\tilde{x}_2\|+1+\|x_2(T)\|\big].$$

又因为当 $T\longrightarrow T_0$ 时, $\mu(T)\longrightarrow 0$, $x_2(T)\longrightarrow 0$, 所以当 $T-T_0$ 很小时, 对应的 $\tilde{x}_2$ 有界, 从而对应的 x 也有界. 在式 (4.6.1) 中令 $T\longrightarrow T_0$, 得 $T_0x\longrightarrow Kx_0$. 注意到 $T_0x\in\mathscr{R}T_0$, 且后者是闭的, 因而 $Kx_0\in\mathscr{R}T_0$. 这是一个矛盾. 引理得证.

现在回到由定理 4.5.2 得到的解曲线. 把引理 4.6.1 用于 $T_0=f_x(0,0)$ 和 $K=f_{\lambda x}(0,0)$ 知, 0 是 $f_x(0,0)$ 的 K–简单特征值. 简单起见, 可认为 $K=I$. 再利用引理 4.6.1 又知, 沿着分支曲线 $(x(s)=sx_0+x_2(s),\lambda(s))$, 存在唯一的 $\mu(s)$ 和 $\omega(s)=x_0+\tilde{x}_2(s)$ 都属于 C^{p-2}, 使得

$$f_x\big(x(s),\lambda(s)\big)\omega(s)=\mu(s)\omega(s).$$

类似地, 沿着另外一条分支曲线 $(\varphi(\sigma),\sigma)$ 有

$$f_x\big(\varphi(\sigma),\,\sigma\big)u(\sigma)=\gamma(\sigma)u(\sigma),\quad u(\sigma)=x_0+\tilde{x}_2(\sigma),\quad \gamma(\sigma)\in C^{p-2}.$$

定理 4.6.1 (Crandall—Rabinowitz) 上面得到的函数 $\gamma(s)$, $\mu(s)$ 和 $\lambda(s)$ 满足 $\gamma'(0)\neq 0$, $s\dot{\lambda}(s)\gamma'(0)$ 和 $\mu(s)$ 或者同时为零, 或者反号. 进一步, 若在 $s=0$ 的附近 $(s\neq 0)$ 有 $\mu(s)\neq 0$, 则

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\dot{\lambda}(s)\gamma'(0)}{\mu(s)}=-1.$$

证明 在分支曲线 $(x=\varphi(\sigma),\lambda=\sigma)$ 上,

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0,\quad f_x(\varphi(\sigma),\sigma)u(\sigma)=\gamma(\sigma)u(\sigma).$$

上面的第二个式子关于 σ 求导再令 $\sigma=0$ 得

$$f_{xx}(0,0)\varphi'(0)u(0)+f_{\lambda x}(0,0)u(0)+f_x(0,0)u'(0)=\gamma'(0)u(0)+\gamma(0)u'(0).$$

进而推知 (因为 $\varphi'(0)=0$, $\gamma(0)=0$)

$$f_{\lambda x}(0,0)u(0)+f_x(0,0)u'(0)=\gamma'(0)u(0).$$

设 $y^*\neq 0$, $y^*\in Y^*$ 是零化 $\mathscr{R}f_x(0,0)$ 的泛函. 注意到 $u(0)=x_0$, 用 y^* 作用于上式得

$$\langle y^*,\,f_{\lambda x}(0,0)x_0\rangle=\gamma'(0)\langle y^*,\,x_0\rangle. \tag{4.6.2}$$

因为 $f_{\lambda x}(0,0)x_0\notin\mathscr{R}f_x(0,0)$, 所以上式左端不为零. 因此

$$\gamma'(0)\neq 0,\quad \langle y^*,\,x_0\rangle\neq 0.$$

在另一条分支曲线上, 我们有

$$f_x\big(x(s),\,\lambda(s)\big)\omega(s)=\mu(s)\omega(s),\qquad x(s)=sx_0+x_2(s). \tag{4.6.3}$$

对 $f(x(s),\,\lambda(s))=0$ 关于 s 求导得

$$f_x\big(x(s),\,\lambda(s)\big)\dot{x}(s)+f_\lambda\big(x(s),\,\lambda(s)\big)\dot{\lambda}(s)=0. \tag{4.6.4}$$

式 (4.6.3) 与式 (4.6.4) 相减又得

$$f_x\big(x(s),\,\lambda(s)\big)[\dot{x}(s)-\omega(s)]+f_\lambda\big(x(s),\,\lambda(s)\big)\dot{\lambda}(s)+\mu(s)\omega(s)=0.$$

把 $f_x\big(x(s),\lambda(s)\big)$, $f_\lambda\big(x(s),\lambda(s)\big)$ 和 $\mu(s)\omega(s)$ 在 $s=0$ 处展成 Taylor 级数并代入上式, 便可推出

$$\begin{aligned} &f_x(0,0)(\dot{x}(s)-\omega(s))+o(1)[\dot{x}(s)-\omega(s)]+f_{\lambda x}(0,0)\dot{x}(0)s\dot{\lambda}(s)\\ &\quad+f_{\lambda\lambda}(0,0)s\dot{\lambda}(s)\dot{\lambda}(0)+o(1)s\dot{\lambda}(s)+\mu(s)x_0+\mu(s)\tilde{x}_2(s)=0, \end{aligned}\tag{4.6.5}$$

这里利用了

$$\begin{aligned} f_x(x(s),\,\lambda(s)) &= f_x(0,0)+o(1),\quad f_\lambda(0,0)=0,\\ f_\lambda(x(s),\,\lambda(s)) &= f_\lambda(0,0)+f_{\lambda x}(0,0)\dot{x}(0)s+f_{\lambda\lambda}(0,0)\dot{\lambda}(0)s+o(1)\\ &= f_{\lambda x}(0,0)\dot{x}(0)s+f_{\lambda\lambda}(0,0)\dot{\lambda}(0)s+o(1). \end{aligned}$$

注意到

$$\dot{x}(s)-\omega(s)=x_0+\dot{x}_2(s)-(x_0+\tilde{x}_2(s))=\dot{x}_2(s)-\tilde{x}_2(s)\in X_2,$$

利用 $f_x(0,0)$ 在 X_2 上可逆且逆算子有界, 便可推出

$$\|\dot{x}(s)-\omega(s)\|\leqslant C(|s\dot{\lambda}(s)|+|\mu(s)|).\tag{4.6.6}$$

把 y^* 作用于式 (4.6.5), 注意到

$$f_{\lambda\lambda}(0,0)\in\mathscr{R}f_x(0,0),\quad \tilde{x}_2(0)=0,\quad f_x(0,0)(\dot{x}(s)-\omega(s))\in\mathscr{R}f_x(0,0)$$

以及 $\dot{x}(0)=x_0$ (因为 $\dot{x}_2(0)=0$), 我们有

$$\begin{aligned} &o(1)\langle y^*,\,\dot{x}(s)-\omega(s)\rangle+s\dot{\lambda}(s)\langle y^*,\,f_{\lambda x}(0,0)x_0\rangle+o(1)s\dot{\lambda}(s)\\ &\quad+\mu(s)\langle y^*,x_0\rangle+\mu(s)\langle y^*,\,\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_2(0)\rangle=0. \end{aligned}$$

根据 $\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_2(0)=o(1)$ 及式 (4.6.6) 推得

$$s\dot{\lambda}(s)\langle y^*,\,f_{\lambda x}(0,0)x_0\rangle+\mu(s)\langle y^*,x_0\rangle=o(1)(|s\dot{\lambda}(s)|+|\mu(s)|).$$

再运用式 (4.6.2), 我们有

$$[s\dot{\lambda}(s)\gamma'(0)+\mu(s)]\langle y^*,x_0\rangle=o(1)(|s\dot{\lambda}(s)|+|\mu(s)|).$$

由于 $\langle y^*,x_0\rangle\neq 0,\gamma'(0)\neq 0$, 并且当 s 很小时 $s\dot{\lambda}(s)$ 和 $\mu(s)$ 都很小, 所以当 s 小时, $s\dot{\lambda}(s)\gamma'(0)$ 与 $\mu(s)$ 或者同时为零, 或者反号, 并且定理的第二个结论成立. 证毕.

4.7 椭圆型方程组解的稳定性与不动点指数的关系

本节讨论一般形式的椭圆型方程组的解的稳定性与其不动点指数的关系. 记

$$u=(u_1,\cdots,u_m),\quad f=(f_1,\cdots,f_m).$$

假设 u^* 是边值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(u), & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{4.7.1}$$

的解, 其中

$$\mathscr{L}=\mathrm{diag}(\mathscr{L}_1,\cdots,\mathscr{L}_m),\quad \mathscr{B}=\mathrm{diag}(\mathscr{B}_1,\cdots,\mathscr{B}_m),$$

$\mathscr{L}_i$ 是散度型的二阶一致椭圆算子, 系数有界, $\mathscr{B}_iu_i=a_i(x)u_i+b_i(x)\dfrac{\partial u_i}{\partial\nu}$ 是边界算子, $a_i(x)$, $b_i(x)\geqslant 0$, $a_i(x)+b_i(x)>0$. 如果问题 (4.7.1) 在 u^* 处的线性化特征值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}v=D_uf(u^*)v+\lambda v, & x\in\Omega,\\ \mathscr{B}v=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{4.7.2}$$

的所有特征值 λ 都有正实部, 则称 u^* 是线性稳定的. 否则就称 u^* 不是线性稳定的. 如果 $\lambda=0$ 是问题 (4.7.2) 的特征值, 则称 u^* 是退化的. 否则就称 u^* 是非退化的.

利用拓扑度方法研究问题 (4.7.1) 的解, 通常是把它等价地转化成算子 $\mathcal{F}$ 的不动点问题, 其中

$$\mathcal{F}(u)=\big(M+\mathscr{L}\big)^{-1}\big(f(u)+Mu\big),$$

$M>0$ 适当大, 使得逆算子 $\big(M+\mathscr{L}\big)^{-1}$ 是紧的.

定理 4.7.1 *如果 u^* 是线性稳定的, 那么*

$$\mathrm{index}\,(\mathcal{F},u^*)=1.$$

证明 对于 $t\geqslant 0$, 令

$$\mathscr{H}_t=(M+t+\mathscr{L})^{-1}[D_uf(u^*)+M].$$

容易证明当 M 适当大时, $\mathscr{H}_t$ 具有如下性质:

(1) $\mathscr{H}_t$ 是紧的;

(2) $t \longrightarrow \mathscr{H}_t$ 是连续的;

(3) 按照算子范数, 当 $t \longrightarrow \infty$ 时, $\mathscr{H}_t \longrightarrow 0$;

(4) 对于每一个 $t \geqslant 0$, 算子 $I - \mathscr{H}_t$ 是可逆的 (因为 u^* 是线性稳定的).

根据性质 (1), (2) 和 (4) 容易看出, 指数 $\mathrm{index}\,(\mathscr{H}_t, 0)$ 不依赖 t. 利用性质 (3) 又知, 当 t 充分大时谱半径 $r(\mathscr{H}_t) < 1$. 故

$$\mathrm{index}\,(\mathcal{F}, u^*) = \mathrm{index}\,(D_u\mathcal{F}(u^*), 0) = \mathrm{index}\,(\mathscr{H}_0, 0) = \mathrm{index}\,(\mathscr{H}_t, 0) = 1.$$

下面证明性质 (3). 性质 (1), (2) 和 (4) 的证明留作习题. 要证明当 $t \longrightarrow \infty$ 时, $\mathscr{H}_t \longrightarrow 0$, 即证明 $\|\mathscr{H}_t\| \longrightarrow 0$. 因为 $\mathscr{H}_t$ 是紧算子, 要证的结果就等价于证明当 $t \longrightarrow \infty$ 时,

$$\sup\left\{|\lambda(t)| : \lambda(t) \text{ 是 } \mathscr{H}_t \text{ 的特征值}\right\} = r(\mathscr{H}_t) \longrightarrow 0.$$

假设 $\lambda(t)$ 是 $\mathscr{H}_t$ 的一个特征值, u 是对应的特征函数, 则有

$$\mathscr{H}_t u = \lambda(t) u,$$

即

$$(M + t + \mathscr{L})u = \frac{1}{\lambda(t)}[D_u f(u^*) + M]u. \tag{4.7.3}$$

先证明存在 $M_0 > 0$, 当 $M \geqslant M_0$ 时, 问题

$$(M + \mathscr{L})u = \mu[D_u f(u^*) + M]u, \quad x \in \Omega; \quad \mathscr{B}u = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{4.7.4}$$

的所有特征值的实部都大于零. 事实上, 设 μ 是问题 (4.7.4) 的特征值, $u = (u_1, \cdots, u_m)$ 是对应的特征函数, 用 u 的共轭 $\bar{u}$ 乘以问题 (4.7.4) 中的方程的两边, 再在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n a_k^{ij}(x) D_i u_k D_j \bar{u}_k \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n b_k^i(x) \bar{u}_k D_i u_k \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \sum_{k=1}^m \big(c_k(x) + M\big)|u_k|^2 \mathrm{d}x = \mu \int_\Omega \bar{u}\big(D_u f(u^*) + M\big)u \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.7.5}$$

因为 $D_u f(u^*)$ 是实矩阵, 所以 $\bar{u}\big(D_u f(u^*) + M\big)u$ 是实函数. 容易证明当 M 适当大时,

$$\bar{u}\big(D_u f(u^*) + M\big)u > 0, \quad \forall\, u \neq 0. \tag{4.7.6}$$

分别用 u_k^R 和 u_k^I 表示函数 u_k 的实部和虚部, 直接计算有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\bar{u}_k D_i u_k\right) &= u_k^R D_i u_k^R + u_k^I D_i u_k^I,\\ \mathrm{Re}\left(D_i u_k D_j \bar{u}_k\right) &= D_i u_k^R D_j u_k^R + D_i u_k^I D_j u_k^I.\end{aligned}$$

注意到 $a_k^{ij}(x)$, $b_k^i(x)$ 和 $c_k(x)$ 都是实函数, 在式 (4.7.5) 的两边取实部得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n a_k^{ij}(x)\left[D_i u_k^R D_j u_k^R + D_i u_k^I D_j u_k^I\right]\mathrm{d}x\\ &+\int_\Omega \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n b_k^i(x)\left[u_k^R D_i u_k^R + u_k^I D_i u_k^I\right]\mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(c_k(x)+M\right)|u_k|^2\mathrm{d}x\\ =\ &\mathrm{Re}\,\mu\int_\Omega \bar{u}\left(D_u f(u^*)+M\right)u\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.7.7}$$

利用 $\mathscr{L}_k$ 的一致椭圆性条件易证, 当 M 充分大时, 式 (4.7.7) 的左端大于零 (因为 $u \neq 0$). 再结合式 (4.7.6) 和式 (4.7.7) 得 $\mathrm{Re}\mu > 0$.

显然问题 (4.7.4) 的特征值与问题

$$(M+t+\mathscr{L})u = \tau[D_u f(u^*)+M]u$$

的特征值之间成立等价关系: $\tau=\tau(\mu,t)=\mu+t$. 故当 $t\longrightarrow\infty$ 时, 对于问题 (4.7.4) 的任何特征值 μ, 都有 $|\tau(\mu,t)| \geqslant t\longrightarrow\infty$. 从而由式 (4.7.3) 知, 当 $t\longrightarrow\infty$ 时, $\dfrac{1}{|\lambda(t)|}=|\tau(\mu,t)|\longrightarrow\infty$, 即 $|\lambda(t)|\longrightarrow 0$. 故当 $t\longrightarrow\infty$ 时, $r(\mathscr{K}_t)\longrightarrow 0$. 定理得证.

4.8 应　用

本节仅以带有非均匀环境的 Holling-Tanner 捕食模型为例, 介绍拓扑度方法和稳定性的简单应用. 在第 5 章和第 6 章中, 我们将给出应用拓扑度方法和稳定性的复杂例子.

考虑方程组的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u = \lambda u - a(x)u^2 - buv, & x\in\Omega,\\ -\Delta v = \mu v\left(1-\dfrac{v}{u}\right), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4.8.1}$$

其中系数 λ, b 和 μ 都是正常数, $a(x)$ 是 $\bar\Omega$ 上的非负连续函数. 我们只讨论在 $\bar\Omega$ 上 $a(x)>0$ 的情况.

本节对于 $q \in C(\bar{\Omega})$, 用 $\lambda_1(q)$ 表示在 Ω 中算子 $-\Delta + q$ 带有齐次 Neumann 边界条件的主特征值. 由特征值的性质我们知道, $\lambda_1(q)$ 关于 q 连续且严格递增, 即当 $q_1 \leqslant q_2$ 且 $q_1 \neq q_2$ 时, 有

$$\lambda_1(q_1) < \lambda_1(q_2).$$

定理 4.8.1　*问题 (4.8.1) 总存在正解.*

证明　设 (u, v) 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)u^2 - tbuv, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \mu v\Big(1 - \dfrac{v}{u}\Big), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.8.2}$$

的正解, 其中 $t \in [0, 1]$. 令 u_λ^* 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)u^2, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的唯一正解 (定理 3.4.5). 由比较原理可得 $0 < u \leqslant u_\lambda^*$. 又对 v 的方程应用定理 B.1.6 可得

$$\max_{\bar{\Omega}} v \leqslant \max_{\bar{\Omega}} u, \qquad \min_{\bar{\Omega}} v \geqslant \min_{\bar{\Omega}} u.$$

因此 $0 \leqslant v \leqslant \max_{\bar{\Omega}} u \leqslant \|u_\lambda^*\|_\infty$.

首先假定 $a \in C^1(\bar{\Omega})$. 由椭圆型方程的正则性理论知, $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. 设 $u(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$, 再次利用定理 B.1.6 得

$$\lambda - a(x_0)u(x_0) - tbv(x_0) \leqslant 0.$$

由此推出

$$\|a\|_\infty \min_{\bar{\Omega}} u + b\|v\|_\infty \geqslant \lambda.$$

把 u 的方程写成

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x)u, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的形式, 其中 $f(x) = \lambda - a(x)u(x) - tbv(x)$ 满足

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leqslant \lambda + \|a\|_\infty \|u\|_\infty + b\|v\|_\infty \\ &\leqslant \lambda + (\|a\|_\infty + b)\|u_\lambda^*\|_\infty. \end{aligned}$$

利用定理 B.1.5 知, 存在正常数 C_λ, 使得

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leqslant C_\lambda \min_{\bar{\Omega}} u.$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda &\leqslant \|a\|_\infty \min_{\bar{\Omega}} u + b\|v\|_\infty \\ &\leqslant \|a\|_\infty \min_{\bar{\Omega}} u + b\|u\|_\infty \\ &\leqslant (\|a\|_\infty + bC_\lambda) \min_{\bar{\Omega}} u,\end{aligned}$$

故

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant \lambda(\|a\|_\infty + bC_\lambda)^{-1}.$$

定义

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_\lambda = \{(u,v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}):\ m_\lambda < u, v < M_\lambda\},$$

其中

$$m_\lambda = \frac{\lambda}{2}\big(\|a\|_\infty + bC_\lambda\big)^{-1}, \quad M_\lambda = 2\|u_\lambda^*\|_\infty.$$

从以上的讨论我们已经知道, 对任意的 $t \in [0,1]$, 问题 (4.8.2) 在 $\partial\mathcal{O}$ 上没有解.

记

$$\begin{aligned}f(t,u,v) &= u + u(\lambda - a(x)u - tbv), \\ g(u,v) &= v + \mu v\Big(1 - \frac{v}{u}\Big), \\ F_t(u,v) &= (\mathscr{L} f(t,u,v),\ \mathscr{L} g(u,v)),\end{aligned}$$

其中算子 $\mathscr{L} = (I - \Delta)^{-1}$. 则 $F_t(u,v): [0,1] \times \bar{\mathcal{O}} \longrightarrow C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ 是紧算子, 并且对任意 $(u,v) \in \bar{\mathcal{O}}$, (u,v) 是问题 (4.8.2) 的解当且仅当 (u,v) 是算子 F_t 的不动点, 即 $(u,v) = F_t(u,v)$. 又因为

$$(u,v) \neq F_t(u,v), \quad \forall\, t \in [0,1], \ (u,v) \in \partial\mathcal{O},$$

故拓扑度 $\deg(I - F_t, \mathcal{O}, 0)$ 有定义且与 $t \in [0,1]$ 无关.

当 $t = 0$ 时, 问题 (4.8.2) 成为

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)u^2, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \mu v\Big(1 - \dfrac{v}{u}\Big), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.8.3}$$

该问题有唯一正解 $(u,v)=(u^*,v^*)$, 其中 $u^*=u^*_\lambda$, v^* 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta v=\mu v\Big(1-\dfrac{v}{u^*}\Big), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial v}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的唯一正解 (定理 3.4.5). 显然 $(u^*,v^*)\in\mathcal{O}$. 因此

$$\deg(I-F_0(\cdot),\mathcal{O},0)=\mathrm{index}(F_0(\cdot),(u^*,v^*)).$$

下面证明 (u^*,v^*) 作为问题 (4.8.3) 的解是线性稳定的. 事实上, 问题 (4.8.3) 在 (u^*,v^*) 处的线性化特征值问题是

$$\begin{cases} -\Delta\varphi=\lambda\varphi-2au^*\varphi+\eta\varphi, & x\in\Omega,\\ -\Delta\psi=\mu\left(1-2\dfrac{v^*}{u^*}\right)\psi+\mu\dfrac{v^{*2}}{u^{*2}}\varphi+\eta\psi, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8.4}$$

其中 η 是特征值, (φ,ψ) 是对应于 η 的特征函数. 由问题 (4.8.3) 中的第一式知, $\lambda_1(au^*-\lambda)=0$. 如果 $\varphi\not\equiv0$, 从问题 (4.8.4) 的第一式推知,

$$\eta\geqslant\lambda_1(2au^*-\lambda)>\lambda_1(au^*-\lambda)=0.$$

如果 $\varphi\equiv0$, 则一定有 $\psi\not\equiv0$. 根据问题 (4.8.3) 的第二式, $\lambda_1\big(\mu(\frac{v^*}{u^*}-1)\big)=0$. 再从问题 (4.8.4) 的第二式又推知,

$$\eta\geqslant\lambda_1\Big(\mu\Big(\frac{2v^*}{u^*}-1\Big)\Big)>\lambda_1\Big(\mu\Big(\frac{v^*}{u^*}-1\Big)\Big)=0.$$

总之 $\eta>0$ 成立, 因而 (u^*,v^*) 是线性稳定的.

利用定理 4.7.1,

$$\mathrm{index}(F_0(\cdot),(u^*,v^*))=1,$$

从而 $\deg(I-F_1(\cdot),\mathcal{O},0)=1$. 由此知 $F_1(\cdot)$ 在 $\mathcal{O}$ 中至少有一个不动点, 即问题 (4.8.1) 至少有一个正解.

如果 $a(x)$ 仅是连续函数, 则可取到在 $C(\bar\Omega)$ 中收敛于 a 的 C^1 函数列 $\{a_i\}_{i=1}^\infty$. 对于任意的 i, 根据前面的讨论可以得到 $a=a_i$ 时问题 (4.8.1) 的正解 (u_i,v_i), 并且由前面的先验估计知, 存在 $0<m<M<\infty$, 使得对任意的 i, 有

$$m<u_i,\ v_i<M.$$

故对任意的 $p>1$, u_i 和 v_i 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中有界. 因此 $\{(u_i,v_i)\}_{i=1}^\infty$ 有子列在 $C^1(\bar\Omega)$ 中收敛到某个 (u,v), 并且 (u,v) 是问题 (4.8.1) 的正解. 证毕.

4.9 锥上的拓扑度理论

在椭圆型方程和方程组的齐次 Dirichlet 边值问题的正解的研究中, 通常需要限制在正锥上来讨论. 这就需要建立锥上的拓扑度理论. 本节首先在锥上定义拓扑度, 而后给出锥上的拓扑度和不动点指数的计算, 最后给出一个例子.

4.9.1 抽象理论

定义 4.9.1 设 E 是一个 Banach 空间, $W \subset E$ 称为一个楔, 如果 W 是一个非空闭凸集, 并且对任意 $\beta \geqslant 0$, 有 $\beta W \subset W$.

容易看出, 若 W 是楔, 并且 $W \cap (-W) = \{0\}$, 则 W 是 E 中的一个锥. 设 $W \subset E$ 是一个楔. 对于 $y \in W$, 定义

$$W_y = \{x \in E:\ \text{存在}\ r = r(x) > 0,\ \text{使得}\ y + rx \in W\}.$$

命题 4.9.1 楔 W 具有如下性质:

(1) 若 $x, y \in W$, 那么 $x + y \in W$;

(2) 对任意 $\beta \geqslant 0$, 有 $\beta W_y \subset W_y$;

(3) $W_y = \{x \in E:\ \text{存在}\ r = r(x) > 0,\ \text{使得}\ y + tx \in W,\ \forall 0 \leqslant t \leqslant r\}$;

(4) W_y 是凸的, 并且 $W_y \supset \{-y\} \cup W$;

(5) $\overline{W}_y$ 也是楔;

(6) 若 $y \in W$, 那么集合 $S_y = \{x \in \overline{W}_y : -x \in \overline{W}_y\}$ 是 E 的线性子空间.

证明 (1) 设 $x, y \in W$, 则对于任意的 $\theta \in (0,1)$, 有

$$\frac{1}{\theta}x,\ \frac{1}{1-\theta}y \in W.$$

于是

$$x + y = \theta\frac{1}{\theta}x + (1-\theta)\frac{1}{1-\theta}y \in W.$$

(2) 当 $\beta = 0$ 时结论显然成立. 当 $\beta > 0$ 时, 对于任意的 $x \in W_y$, 存在 $r > 0$ 使得 $y + rx \in W$. 因而 $y + \dfrac{r}{\beta}\beta x = y + rx \in W$, 故 $\beta x \in W_y$.

(3) 按照定义,

$$\{x \in E:\ \text{存在}\ r = r(x) > 0,\ \text{使得}\ y + tx \in W,\ \forall 0 \leqslant t \leqslant r\} \subset W_y$$

是显然的.

再设 $x \in W_y$. 则存在 $r > 0$ 使得 $y + rx \in W$. 当 $t = 0$ 或者 $t = r$ 时, $y + tx \in W$ 显然成立. 当 $0 < t < r$ 时,

$$y + tx = \frac{t}{r}\left(\frac{r}{t}y + rx\right) = \frac{t}{r}\left(\frac{r-t}{t}y + y + rx\right).$$

因为 $\dfrac{r-t}{t}y \in W$, $y+rx \in W$, 所以 $y+tx \in W$, 故

$$W_y \subset \{x \in E:\ 存在\ r=r(x)>0,\ 使得\ y+tx \in W,\ \forall 0 \leqslant t \leqslant r\}.$$

性质 (4) 的证明留作习题.

(5) 由性质 (4) 知 W_y 是凸集, 从而 $\overline{W}_y$ 是凸集. 又因为 $\beta W_y \subset \dot{W}_y$ 对任意的 $\beta \geqslant 0$ 成立, 所以 $\beta \overline{W}_y \subset \overline{W}_y$. 故 $\overline{W}_y$ 是楔.

性质 (6) 的证明留作习题. 证毕.

定义 4.9.2　设 $T: \overline{W}_y \longrightarrow \overline{W}_y$ 是紧线性算子. 称 T 具有 α 性质, 如果存在 $t \in (0,1)$ 和 $w \in \overline{W}_y \setminus S_y$, 使得 $w - tTw \in S_y$.

定理 4.9.1　对于 $y \in W$, $\delta > 0$, 记 $B_+ = W \cap B_\delta(y)$. 假设算子 $F: B_+ \longrightarrow W$ 是紧的, 并且 y 是 F 的一个孤立不动点, 同时 F 在点 y 处有 Fréchet 导数 $F'(y)$. 那么 $F'(y): \overline{W}_y \longrightarrow \overline{W}_y$.

证明　先设 $x \in W_y$, 并且不妨认为 $\|x\| \leqslant 1$. 则存在 $\rho: 0 < \rho < \delta$, 使得 $y+tx \in W$ 对于所有的 $0 < t < \rho$ 成立. 显然 $y+tx \in B_+$. 按照导算子的定义, 我们有

$$F(y+tx) - y = F(y+tx) - F(y) = tF'(y)x + o(t). \tag{4.9.1}$$

因为 $y+tx \in B_+$, 所以 $F(y+tx) \in W \subset W_y$, 故存在 $0 < \rho_0 < 1$, 使得

$$y + sF(y+tx) \in W,\quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant \rho_0.$$

由于当 $0 < \rho \leqslant \rho_0/(1+\rho_0)$ 时, $\rho/(1-\rho) \leqslant \rho_0$, 从而有 $y + \dfrac{\rho}{1-\rho}F(y+tx) \in W$, 进而又得

$$y + \rho(F(y+tx) - y) = (1-\rho)\left[y + \frac{\rho}{1-\rho}F(y+tx)\right] \in W.$$

这说明 $F(y+tx) - y \in W_y$, 于是

$$z_t := \frac{1}{t}\big(F(y+tx) - y\big) \in W_y.$$

由 (4.9.1) 式知

$$F'(y)x + \frac{1}{t}o(t) = z_t \in W_y.$$

令 $t \longrightarrow 0$ 得 $F'(y)x \in \overline{W}_y$. 这样就证明了 $F'(y): W_y \longrightarrow \overline{W}_y$.

因为 $F'(y)$ 是紧的, 所以 $F'(y): \overline{W}_y \longrightarrow \overline{W}_y$. 证毕.

我们总假设

$$E = \overline{W - W} = \overline{\{x - y : x, y \in W\}}.$$

由此推知 W 是 E 的一个收缩核, 因而可以在楔 W 上定义拓扑度. 假设 Ω 是 W 中的一个有界开集, $F:\bar{\Omega}\longrightarrow W$ 是紧算子, $y_0\notin(I-F)(\partial\Omega)$, 其中 I 是恒同算子. 我们可以在 W 上定义 $I-F$ 在点 y_0 处的 Leray-Schauder 度 $\deg_W(I-F,\Omega,y_0)$. 度 $\deg_W(I-F,\Omega,y_0)\neq 0$ 蕴含方程 $x-F(x)=y_0$ 在 Ω 中有解. 这样定义的度称为锥上的拓扑度. 对于锥上的拓扑度而言, 同伦不变性、切除性和可加性都成立.

当 $y_0=0$ 时, 简记 $\deg_W(I-F,\Omega,0)=\deg_W(I-F,\Omega)$. 若 $y\in W$ 是 F 的孤立不动点, 并且 $I-F'(y)$ 可逆, 那么 F 在 y 点的不动点指数定义为 $\mathrm{index}_W(F,y)=\deg_W\big(I-F,N(y)\big)$, 其中 $N(y)$ 是 y 在 W 中的一个小邻域.

定理 4.9.2 ([18, 21]) *在上面的记号和条件之下, 如果 $I-F'(y)$ 在 $\overline{W}_y$ 上可逆, 那么*

(1) 若 $F'(y)$ 有 α 性质, 则 $\mathrm{index}_W(F,y)=0$;

(2) 若 $F'(y)$ 没有 α 性质, 则 $\mathrm{index}_W(F,y)=(-1)^\beta$, 其中 β 是 $F'(y)$ 的所有大于 1 的特征值的代数重数之和. 根据定理 4.4.1 又知, 当 $F'(y)$ 没有 α 性质时,

$$\mathrm{index}_W(F,y)=\mathrm{index}(F,y).$$

从定理 4.9.2 看出, 在计算不动点指数时判断 α 性质是非常重要的. 按照 α 性质的定义, 需要计算 W_y 和 S_y. 在具体应用中, 通常取 E 是函数空间 $\{u\in C^1(\bar{\Omega}):u|_{\partial\Omega}=0\}$ (方程式) 或者 $[\{u\in C^1(\bar{\Omega}):u|_{\partial\Omega}=0\}]^m$ (方程组), W 是非负函数构成的正锥. 引理 2.2.1 在计算 W_y 和 S_y 时起重要作用.

锥上的不动点指数还可以按照下面的方式来计算. 设 W 是正锥, 即 $W=\{x\in E:x\geqslant 0\}$, 映射 $F:W\longrightarrow W$ 是紧的且 Fréchet 可微, E_y 是 E 的包含于楔 $\overline{W}_y$ 的最大子空间. 如果存在 E 的一个子空间 $\tilde{E}_y$, 使得 $E=E_y\bigoplus\tilde{E}_y$, 那么 F 在 y 处的不动点指数 $\mathrm{index}_W(F,y)$ 可以通过分析算子 $F'(y)$ 在空间 E_y 中的特征值而得到.

先约定一个说法. 假设 X 是 Banach 空间, X_0 是 X 中的一个子集, $\mathscr{L}$ 是定义在 X_0 上的算子. 称 $\mathscr{L}$ 在 X_0 中有特征值 λ, 是指存在非零的 $x_0\in X_0$ 使得 $\mathscr{L}x_0=\lambda x_0$. 如果 $\mathscr{L}$ 是定义在 X 上或者 X 的某个子集 $X_1\supset X_0$ 上的算子, 称限制在 X_0 上 $\mathscr{L}$ 有特征值 λ, 是指 $\mathscr{L}$ 在 X_0 中有特征值 λ.

定理 4.9.3 ([22, 定理 2.2, 定理 2.3]) *令 $T:E\longrightarrow\tilde{E}_y$ 是投影算子. 假若 F 在 y 处的 Fréchet 导算子 $F'(y)$ 在 $\overline{W}_y$ 中没有非零的不动点, 那么指数 $\mathrm{index}_W(F,y)$ 存在. 如果限制在 $\overline{W}_y$ 上算子 $T\circ F'(y)$ 有大于 1 的特征值, 则 $\mathrm{index}_W(F,y)=0$. 如果限制在 $\overline{W}_y$ 上算子 $T\circ F'(y)$ 没有大于 1 的特征值, 则 $\mathrm{index}_W(F,y)=\mathrm{index}_{E_y}(F'(y),0)=(-1)^r$, 这里 $\mathrm{index}_{E_y}(F'(y),0)$ 是线性算子 $F'(y)$ 在空间 E_y 中在 0 点的指数, r 是 $F'(y)$ 限制在 E_y 上大于 1 的特征值的代数重数之和.*

4.9.2 应用

在后面第 5 章的两个例子中, 我们都是利用定理 4.9.2 计算锥上的不动点指数.

这里给出一个应用定理 4.9.3 计算锥上的不动点指数的例子.

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, 考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u\Big(a - u - \dfrac{mv}{k+u}\Big), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v\Big(b - \dfrac{v}{1+u}\Big), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.9.2}$$

其中 a, b, m 和 k 都是正常数. 取

$$E = [\{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}]^2, \quad W = \big\{(u,v) \in E : u, v \geqslant 0\big\}.$$

按如下方式定义集合 $\mathcal{O}$ 和算子 F:

$$\mathcal{O} = \{(u,v) \in W : 0 \leqslant u(x) < a, \ \ 0 \leqslant v(x) < b(1+a), \ \ x \in \bar{\Omega}\},$$

$$F(u,v) = (M-\Delta)^{-1}\left(Mu + u\left(a - u - \frac{mv}{k+u}\right), Mv + v\left(b - \frac{v}{1+u}\right)\right),$$

这里 M 是一个适当大的正常数. 那么 $F : \bar{\mathcal{O}} \longrightarrow W$ 是紧的. 根据习题 3.9 知, $\mathcal{O}$ 包含问题 (4.9.2) 的所有非负解.

定理 4.9.4 假设 $a \neq \lambda_1$, $b \neq \lambda_1$.

(1) 如果 $a > \lambda_1$ 或者 $b > \lambda_1$, 那么 $\mathrm{index}_W(F,(0,0)) = 0$; 如果 $a, b < \lambda_1$, 那么 $\mathrm{index}_W(F,(0,0)) = 1$;

(2) 假设$b > \lambda_1$, $a \neq \lambda_1\left(\dfrac{m}{k}\theta_b\right)$. 那么当 $a > \lambda_1\left(\dfrac{m}{k}\theta_b\right)$ 时, $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b)) = 0$; 当 $a < \lambda_1\left(\dfrac{m}{k}\theta_b\right)$ 时, $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b)) = 1$;

(3) 假设 $a > \lambda_1$. 则当 $b > \lambda_1$ 时, $\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) = 0$; 当 $b < \lambda_1$ 时, $\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) = 1$.

这里 θ_a, θ_b 的定义同于第 3 章的 3.5 节.

证明 (1) 直接计算知 $\overline{W}_{(0,0)} = W$, $E_{(0,0)} = \{(0,0)\}$, $\tilde{E}_{(0,0)} = E$, $T = I$, 其中 I 是 E 上的恒同算子. 易证

$$F'(0,0)(u,v) = (M-\Delta)^{-1}\big((a+M)u, \, (b+M)v\big),$$

$F'(0,0)$ 在 $\overline{W}_{(0,0)}$ 中没有非零不动点, 对应的特征向量属于 $W_{(0,0)}$ 的算子 $F'(0,0)$ 的特征值是 $\lambda_a := \dfrac{a+M}{\lambda_1+M}$ 和 $\lambda_b := \dfrac{b+M}{\lambda_1+M}$. 如果 $a > \lambda_1$ 或者 $b > \lambda_1$, 那么 $\lambda_a > 1$ 或者 $\lambda_b > 1$, 于是由定理 4.9.3 知, $\mathrm{index}_W(F,(0,0)) = 0$. 如果 $a, b < \lambda_1$, 那么 $\lambda_a, \lambda_b < 1$, 于是

$$\mathrm{index}_W(F,(0,0)) = \mathrm{index}_{E_{(0,0)}}(F'(0,0),(0,0)) = (-1)^r.$$

因为 $E_{(0,0)} = \{(0,0)\}$, 所以 $r=0$. 故定理 4.9.3 得, $\mathrm{index}_W(F,(0,0)) = 1$.

(2) 简单计算知 $\overline{W}_{(0,\theta_b)} = \{(u,v)\in E:\ u\geqslant 0\}$, $E_{(0,\theta_b)} = \{(u,v)\in E:\ u=0\}$. 令

$$\tilde{E}_{(0,\theta_b)} = \{(u,v)\in E:\ v=0\},$$

则

$$E = E_{(0,\theta_b)} \oplus \tilde{E}_{(0,\theta_b)}, \quad T:\ (u,v)\longrightarrow (u,0),$$

$$F'(0,\theta_b)(u,v) = (M-\Delta)^{-1}\left(\left(a+M-\tfrac{m}{k}\theta_b\right)u,\ (b+M-2\theta_b)v+\theta_b^2 u\right),$$

这里我们取 M 适当大, 使得 $a+M-\dfrac{m}{k}\theta_b>0$, $b+M-2\theta_b>0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 由于 $a\neq\lambda_1\left(\dfrac{m}{k}\theta_b\right)$, 并且问题

$$\begin{cases} -\Delta w = (b-2\theta_b)w, & x\in\Omega, \\ w=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

没有非平凡解 (习题 2.7), 所以 $F'(0,\theta_b)$ 在 $W_{(0,\theta_b)}\setminus\{(0,0)\}$ 中没有不动点. 因此 $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b))$ 存在.

下面讨论 $T\circ F'(0,\theta_b)$ 的特征值. 根据投影算子 $T:(u,v)\longrightarrow(u,0)$ 的形式知, 算子 $T\circ F'(0,\theta_b)$ 对应于非零特征值的特征向量都是 $(u,0)$ 的形式. 容易看出: λ 是 $T\circ F'(0,\theta_b)$ 的一个特征值, $(u,0)$ 是对应的特征向量, 当且仅当 u 是问题

$$\lambda u = (M-\Delta)^{-1}\left(a+M-\frac{m}{k}\theta_b\right)u, \quad u\neq 0$$

的解. 由此知 $\lambda\neq 0$, 并且 u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{m\theta_b}{k}u + \dfrac{\lambda-1}{\lambda}\left(a+M-\dfrac{m\theta_b}{k}\right)u = au, & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \quad u|_{\Omega}\not\equiv 0. \end{cases}$$

故存在 $j\geqslant 1$, 使得

$$a = \lambda_j\left(\frac{m\theta_b}{k} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\left(a+M-\frac{m\theta_b}{k}\right)\right). \tag{4.9.3}$$

当 $a>\lambda_1\left(\dfrac{m}{k}\theta_b\right)$ 时, 容易看出存在 $\lambda>1$, 使得 (4.9.3) 对于 $j=1$ 成立. 根据定理 4.9.3, $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b))=0$.

当 $a<\lambda_1\left(\dfrac{m}{k}\theta_b\right)$ 时, 如果 (4.9.3) 成立, 那么 $\lambda<1$ 并且

$$\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b)) = \mathrm{index}_{E_{(0,\theta_b)}}(F'(0,\theta_b),(0,0)) = (-1)^r.$$

下面计算 r. 假设 μ 是 $F'(0,\theta_b)$ 的一个特征值, $(\xi,\zeta)\in E_{(0,\theta_b)}$ 是对应的特征向量, 那么 $\xi=0$, ζ 是方程

$$\mu\zeta=(M-\Delta)^{-1}(b+M-2\theta_b)\zeta$$

的一个非零解. 故有

$$-\Delta\zeta+2\theta_b\zeta+\frac{\mu-1}{\mu}(b+M-2\theta_b)\zeta=b\zeta,\quad x\in\Omega;\quad \zeta=0,\quad x\in\partial\Omega.$$

于是存在 $j\geqslant 1$, 使得 $b=\lambda_j\left(2\theta_b+\dfrac{\mu-1}{\mu}(b+M-2\theta_b)\right)$. 因为 $\lambda_1(2\theta_b)>b$, 所以 $\mu<1$, 故 $r=0$, 从而由定理 4.9.3 得 $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b))=1$.

结论 (3) 的证明类似. 证毕.

习　题　4

4.1　记 $\Omega=(-2,2)$, $f(x)=(x-1)x^2$. 计算 $\deg(f,\Omega,0)$.

4.2　定义函数空间 $C([0,\pi])$ 上的积分算子 K:

$$(K(v))(x)=\int_0^\pi \sin(x-y)(1+v(y))^2dy,\qquad v\in C([0,\pi]).$$

又设 $v_0\in C([0,\pi])$.

(1) 证明在 v_0 处 K 是 Fréchet 可微的;

(2) 试确定 $K'(0)$ 的核, 并证明 $K'(0)$ 的值域属于 $C^\infty((0,\pi))$.

4.3　设 X 是一个 Banach 空间, $D\subset X\times\mathbb{R}$, $f:D\longrightarrow X$, $f(x,\lambda)=x-(\mu_0+\lambda)Tx+g(x,\lambda)$, 其中 $T:X\longrightarrow X$ 是线性紧算子, $g:D\longrightarrow X$ 是非线性紧算子, $g(0,\lambda)\equiv 0$, $g(x,\lambda)=o(\|x\|)$ 关于 $|\lambda|<\varepsilon$ 一致成立. 又设 $\mu_0\neq 0$, $(0,0)\in D$. 试证明 $(0,0)$ 是非线性方程 $f(x,\lambda)=0$ 的一个分支点的必要条件是 $1/\mu_0$ 是 T 的一个特征值.

4.4　证明定理 4.1.9.

4.5　设 X 和 Y 都是 Banach 空间, X_1 是 X 的有限维子空间, $X_1\subset Y$, $X=X_1\oplus X_2$, $K:X\longrightarrow Y$ 是紧算子. 定义算子

$$T:X\longrightarrow Y,\quad T(x)=x_1+K(x),\quad x\in X,\quad x=x_1+x_2.$$

证明 T 是紧的.

4.6　设 X 是 Banach 空间, $K:X\longrightarrow X$ 是紧算子, $T=I-K$. 又设 Ω 是 X 的有界闭集, $0\notin T(\Omega)$. 证明存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\|T(x)\|\geqslant\varepsilon$ 在 Ω 上成立.

4.7 设 $k>0$ 是偶数, 试证明边值问题

$$u''+u-u^k=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\pi;\qquad u(0)=u(\pi)=0$$

没有解.

4.8 证明定理 4.5.3.

4.9 在定理 4.7.1 的证明中, 我们定义了算子 $\mathscr{H}_t$. 试证明 $\mathscr{H}_t$ 的性质 (1), (2) 和 (4).

4.10 证明命题 4.9.1 的结论 (4) 和 (6).

第 5 章　方程组的齐次 Dirichlet 边值问题

本章利用前面建立的分支理论和锥上的拓扑度理论, 研究两个椭圆型方程组的齐次 Dirichlet 边值问题正解的存在性、多解性、分支与稳定性.

5.1　一个带有修正的 Holling II 型响应函数的捕食模型

本节讨论带有修正的 Holling II 型响应函数的捕食模型的椭圆型方程组的齐次 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u\big(a - u - bvf(u,v)\big), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v\big(c - v + duf(u,v)\big), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.1}$$

正解的存在性、多解性、分支与稳定性, 其中 u 和 v 分别表示食物和猎物的分布密度, 函数

$$f(u,v) = \frac{1}{(1+\alpha u)(1+\beta v)},$$

并且所有参数都是正常数. 容易证明, 若 (u,v) 是问题 (5.1.1) 的非负解并且 $u \neq 0, v \neq 0$, 那么一定有 $u(x) > 0, v(x) > 0$ 在 Ω 内成立. 这种解称为共存解.

我们首先运用锥上的不动点指数理论, 给出问题 (5.1.1) 的共存解存在的充分必要条件; 其次讨论当 $\alpha \longrightarrow \infty$, 或者 $\beta \longrightarrow \infty$, 或者 $b \longrightarrow 0^+$ 时, 共存解的稳定性; 最后研究共存解的分支.

5.1.1　先验估计

同前, 当 $a > \lambda_1$ 时, 记 θ_a 是边值问题 (3.5.1) 的唯一正解. 那么 $\left.\dfrac{\partial \theta_a}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0$. 显然当 $a, c > \lambda_1$ 时, 问题 (5.1.1) 有半平凡非负解 $(\theta_a, 0)$ 和 $(0, \theta_c)$, 而且它的半平凡非负解只有这两个.

定理 5.1.1　*记 $g(v) = c - v + ad/(1+\beta v)$. 显然 $g(v) = 0$ 有唯一正根, 记为 R. 那么问题 (5.1.1) 的任意非负解 (u,v) 满足先验估计*

$$u(x) \leqslant a, \quad v(x) \leqslant R.$$

证明 因为

$$-\Delta u = u\big(a - u - bvf(u,v)\big) \leqslant u(a-u),$$

由最大值原理得 $u(x) \leqslant a$. 又因为 R 为 $g(v)=0$ 的唯一正根, 再由最大值原理得 $v(x) \leqslant R$.

5.1.2 不动点指数的计算

先给出一些记号:

$E = X \times X$, 其中 $X = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$;

$W = K \times K$, 其中 $K = \{u \in X : u \geqslant 0\}$;

$D = \{(u,v) \in W : u < a+1,\ v < R+1\}$;

$D^\circ = \{(u,v) \in E : 0 < u < a+1,\ 0 < v < R+1\}$.

由定理 5.1.1 知, 问题 (5.1.1) 的任意非负解都属于 D, 故存在正常数 M, 当 $(u,v) \in \bar{D}$ 时, 函数

$$u\big(a-u-bvf(u,v)\big)+Mu \quad 和 \quad v\big(c-v+duf(u,v)\big)+Mv$$

都是非负的. 再定义映射 $F: E \longrightarrow E$,

$$F(u,v) = (M-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} u\big(a-u-bvf(u,v)\big)+Mu \\ v\big(c-v+duf(u,v)\big)+Mv \end{pmatrix},$$

那么 F 是紧算子, 并且 $F: D \longrightarrow W$. 显然问题 (5.1.1) 有解等价于算子方程 $F(u,v)=(u,v)$ 有解.

利用引理 2.2.1 易证:

(1) $\overline{W}_{(0,0)} = K \times K$, $S_{(0,0)} = \{(0,0)\}$,

(2) $\overline{W}_{(\theta_a,0)} = X \times K$, $S_{(\theta_a,0)} = X \times \{0\}$,

(3) $\overline{W}_{(0,\theta_c)} = K \times X$, $S_{(0,\theta_c)} = \{0\} \times X$.

对于任意的 $t \in [0,1]$, 定义

$$F_t(u,v) = (M-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} tu\big(a-u-bvf(u,v)\big)+Mu \\ tv\big(c-v+duf(u,v)\big)+Mv \end{pmatrix}.$$

那么, $F_t(u,v): [0,1] \times D \longrightarrow W$ 是正的紧算子, 并且 $F = F_1$.

引理 5.1.1 假设 $a > \lambda_1$, 我们有

(1) $\deg_W(I-F, D) = 1$;

(2) 若 $c \neq \lambda_1$, 则 $\mathrm{index}_W(F,(0,0)) = 0$;

(3) 若 $c > \lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$, 则 $\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) = 0$;

(4) 若 $c < \lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$, 则 $\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) = 1$.

证明 (1) 显然在 ∂D 上 F 没有不动点, 即 $\deg_W(I-F,D)$ 有意义. 对于任意的 t, F_t 的不动点是下述方程的解:

$$\begin{cases} -\Delta u = tu\big(a-u-bvf(u,v)\big), & x\in\Omega, \\ -\Delta v = tv\big(c-v+duf(u,v)\big), & x\in\Omega, \\ u=v=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

由定理 5.1.1 知, 对于任意的 $t\in[0,1]$, F_t 的不动点满足 $u\leqslant a$, $v\leqslant R$, 所以 F_t 的不动点一定落在 D 内. 再由同伦不变性知 $\deg_W(I-F_t,D)$ 不依赖于 t, 于是

$$\deg_W(I-F,D) = \deg_W(I-F_1,D) = \deg_W(I-F_0,D).$$

又因为当 $t=0$ 时, 问题 (5.1.2) 只有平凡解 $(0,0)$, 所以 $\deg_W(I-F_0,D) = \mathrm{index}_W(F_0,(0,0))$.

注意到 $\overline{W}_{(0,0)} = K\times K$, $S_{(0,0)} = \{(0,0)\}$, $\overline{W}_{(0,0)}\backslash S_{(0,0)} = \{K\times K\}\backslash\{(0,0)\}$, 若记

$$L := F_0{}'(0,0) = (M-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

那么由定理 2.4.11 易知 $r(L)<1$. 因此 $I-L$ 在 $\overline{W}_{(0,0)}$ 上可逆, 且 L 在 $\overline{W}_{(0,0)}$ 上没有 α 性质. 根据定理 4.9.2, $\mathrm{index}_W(F_0,(0,0)) = 1$, 从而 $\deg_W(I-F,D) = 1$.

(2) 易知 $F(0,0) = (0,0)$ 且 F 在 $\bar{D}$ 上是正的紧算子. 直接计算得

$$F'(0,0) = (M-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} a+M & 0 \\ 0 & c+M \end{pmatrix}.$$

先证明 $I-F'(0,0)$ 在 $\overline{W}_{(0,0)}$ 上可逆. 如果存在 $(\xi,\eta)\in\overline{W}_{(0,0)}$, 使得 $F'(0,0)(\xi,\eta) = (\xi,\eta)$, 则有

$$\begin{cases} -\Delta\xi = a\xi, & x\in\Omega, \\ \xi = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

如果 $\xi>0$, 则 $a=\lambda_1$, 得矛盾. 因而 $\xi\equiv 0$. 同理可证 $\eta\equiv 0$. 这说明 $I-F'(0,0)$ 在 $\overline{W}_{(0,0)}$ 上可逆.

下证 $F'(0,0)$ 具有 α 性质. 因为 $a>\lambda_1$, 由定理 2.4.11,

$$r_a := r[(M-\Delta)^{-1}(a+M)] > 1,$$

同时 r_a 是算子 $(M-\Delta)^{-1}(a+M)$ 的主特征值, 对应的特征函数 $\phi>0$. 取 $t_0=r_a^{-1}$, 则 $0<t_0<1$ 并且 $(I-t_0F'(0,0))(\phi,0)=(0,0)\in S_{(0,0)}$. 因此 $F'(0,0)$ 具有 α 性质. 利用定理 4.9.2 知, $\mathrm{index}_W(F,(0,0))=0$.

(3) 注意到 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}=X\times K$, $S_{(\theta_a,0)}=X\times\{0\}$, 我们有

$$\overline{W}_{(\theta_a,0)}\backslash S_{(\theta_a,0)} = X\times\{K\backslash\{0\}\}.$$

直接计算得

$$F'(\theta_a,0)=(M-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} a-2\theta_a+M & -\dfrac{b\theta_a}{1+\alpha\theta_a} \\ 0 & c+\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}+M \end{pmatrix}.$$

先证 $I-F'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上可逆. 假设存在 $(\xi,\eta)\in\overline{W}_{(\theta_a,0)}$, 使得 $F'(\theta_a,0)(\xi,\cdot\eta)=(\xi,\eta)$, 即

$$\begin{cases} -\Delta\xi+(2\theta_a-a)\xi=-\dfrac{b\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\eta, & x\in\Omega, \\ -\Delta\eta-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\eta=c\eta, & x\in\Omega, \\ \xi=\eta=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

若 $\eta\not\equiv0$, 注意到 $\eta\in K$, 由问题 (5.1.3) 的第二个方程知 $c=\lambda_1\big(-\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\big)$, 这是一个矛盾, 故 $\eta\equiv0$. 若 $\xi\not\equiv0$, 则 0 是

$$\begin{cases} -\Delta\phi+(2\theta_a-a)\phi=\lambda\phi, & x\in\Omega, \\ \phi=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的一个特征值, 所以 $\lambda_1(2\theta_a-a)\leqslant0$. 另一方面, 由于 $\lambda_1(\theta_a-a)=0$, 利用特征值的比较原理知, $\lambda_1(2\theta_a-a)>\lambda_1(\theta_a-a)=0$, 矛盾. 因此 $(\xi,\eta)=(0,0)$, 故 $I-F'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上可逆.

再证 $F'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上具有 α 性质. 记

$$\mathcal{A}:=(M-\Delta)^{-1}\Big(c+\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}+M\Big).$$

因为 $c>\lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$, 所以 $r(\mathcal{A})>1$ 且是算子 $\mathcal{A}$ 的主特征值, 对应的特征函

数 $\phi > 0$. 取 $t_0 = \frac{1}{r(\mathcal{A})}$, 则 $t_0 \in (0,1)$, $(0,\phi) \in \overline{W}_{(\theta_a,0)} \backslash S_{(\theta_a,0)}$, 并且

$$\big(I - t_0 F'(\theta_a, 0)\big)\begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M-\Delta)^{-1}\dfrac{t_0 b\theta_a \phi}{1+\alpha\theta_a} \\ \phi - t_0 (M-\Delta)^{-1}\Big(c + \dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a} + M\Big)\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (M-\Delta)^{-1}\dfrac{t_0 b\theta_a \phi}{1+\alpha\theta_a} \\ 0 \end{pmatrix} \in S_{(\theta_a,0)}.$$

故 $F'(\theta_a,0)$ 具有 α 性质. 由定理 4.9.2 知 $\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) = 0$.

(4) 注意到

$$\overline{W}_{(\theta_a,0)} = X \times K, \quad S_{(\theta_a,0)} = X \times \{0\}, \quad \overline{W}_{(\theta_a,0)} \backslash S_{(\theta_a,0)} = X \times \{K \backslash \{0\}\},$$

同于 (3) 可证 $I - F'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上可逆.

下证 $F'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上不具有 α 性质. 因为 $c < \lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$, 所以 $r(\mathcal{A}) < 1$. 如果 $F'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上具有 α 性质, 则存在 $0 < t < 1$ 和 $(\phi_1,\phi_2) \in \overline{W}_{(\theta_a,0)} \backslash S_{(\theta_a,0)}$, 使得 $\big(I - tF'(\theta_a,0)\big)(\phi_1,\phi_2)^{\mathrm{T}} \in S_{(\theta_a,0)}$. 于是

$$\phi_2 - t(M-\Delta)^{-1}\Big(c + \frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a} + M\Big)\phi_2 = 0.$$

又因 $\phi_2 \in K \backslash \{0\}$, 所以 $1/t > 1$ 是算子 $\mathcal{A}$ 的一个特征值. 此与 $r(\mathcal{A}) < 1$ 矛盾. 因此 $F'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$不具有 α 性质. 根据定理 4.9.2,

$$\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) = (-1)^{\sigma},$$

其中 σ 是 $F'(\theta_a,0)$ 的所有大于 1 的特征值的代数重数之和.

假设 $1/\mu > 1$ 是 $F'(\theta_a,0)$ 的一个特征值, 对应的特征函数记为 $(\xi,\eta)^{\mathrm{T}}$. 我们有

$$(M-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} (a - 2\theta_a + M)\xi - \dfrac{b\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\eta \\ \Big(c + \dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a} + M\Big)\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} -\Delta\xi + M\xi = \mu\left((a - 2\theta_a + M)\xi - \dfrac{b\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\eta\right), & x \in \Omega, \\ -\Delta\eta + M\eta = \mu\left(c + \dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a} + M\right)\eta, & x \in \Omega, \\ \xi = \eta = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

如果 $\eta\neq 0$, 则由第二个方程知

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant \lambda_1\left(M(1-\mu)-\mu\left(c+\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)\right)\\
&> \lambda_1\left(-\left(c+\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)\right)=-c+\lambda_1\left(-\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right),
\end{aligned}
$$

此与 $c<\lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$ 矛盾. 故 $\eta=0$, 因此 $\xi\neq 0$. 注意到 $\theta_a\leqslant a$, 利用问题 (5.1.4) 中 ξ 的方程, 我们有

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant \lambda_1\big(M(1-\mu)-\mu(a-2\theta_a)\big)\\
&> \lambda_1\big(-\mu(a-\theta_a)\big)\geqslant \lambda_1\big(-(a-\theta_a)\big)=0,
\end{aligned}
$$

矛盾. 所以 $F'(\theta_a,0)$ 没有大于 1 的特征值, 于是 $\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0))=1$. 证毕.

同上可证

引理 5.1.2 设 $c>\lambda_1$.

(1) 若 $a>\lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$, 则 $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_c))=0$;

(2) 若 $a<\lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$, 则 $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_c))=1$.

5.1.3 共存解的存在性

定理 5.1.2

(1) 如果 $a\leqslant\lambda_1$, 那么问题 (5.1.1) 的非负解只可能是 $(0,0)$ 或者 $(0,\theta_c)$;

(2) 若 $c>\lambda_1$ 且 (5.1.1) 有正解, 则 $a>\lambda_1\big(b\theta_c f(\theta_a,\theta_c)\big)$.

证明 (1) 若问题 (5.1.1) 有非负解 (u,v) 并且 $u\neq 0$, 则

$$
\begin{cases}
-\Delta u=u\big(a-u-bvf(u,v)\big), & x\in\Omega,\\
u=0, & x\in\partial\Omega.
\end{cases}
$$

由此知 $\lambda_1\big(u+bvf(u,v)-a\big)=0$, 即 $a=\lambda_1\big(u+bvf(u,v)\big)>\lambda_1(0)=\lambda_1$. 这是一个矛盾. 因此 (5.1.1) 的非负解只能是 $(0,v)$ 的形式, 从而有 $v=0$ 或者 $v=\theta_c$.

(2) 由于 $c>\lambda_1$, 故 θ_c 存在. 假设 (u,v) 是问题 (5.1.1) 的正解, 则 $a>\lambda_1$, 因此 θ_a 存在. 注意到

$$
\begin{cases}
-\Delta u=u\big(a-u-bvf(u,v)\big)<u(a-u), & x\in\Omega,\\
u=0, & x\in\partial\Omega,
\end{cases}
$$

根据 θ_a 的唯一性, $u < \theta_a$. 又因为

$$\begin{cases} -\Delta v = v\big(c - v + duf(u,v)\big) > v(c-v), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

再由 θ_c 的唯一性, $v > \theta_c$. 于是

$$\lambda_1\big(b\theta_c f(\theta_a,\theta_c) - a\big) < \lambda_1\big(u + bvf(u,v) - a\big) = 0,$$

从而 $a > \lambda_1\big(b\theta_c f(\theta_a,\theta_c)\big)$. 证毕.

定理 5.1.3

(1) 若 $c > \lambda_1$, $a > \lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$, 那么问题 (5.1.1) 有共存解;

(2) 若 $c < \lambda_1$, 那么问题 (5.1.1) 有共存解当且仅当 $a > \lambda_1$, $c > \lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$.

证明 (1) 根据引理 5.1.1 和引理 5.1.2,

$$\deg_W(I-F,D) - \mathrm{index}_W(F,(0,0)) - \mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) - \mathrm{index}_W(F,(0,\theta_c)) = 1,$$

因而问题 (5.1.1) 有共存解.

(2) 先证充分性. 因为 $c < \lambda_1$, 所以问题 (5.1.1) 没有形如 $(0,v)$ 的非零非负解. 若 $a > \lambda_1$, $c > \lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$, 由引理 5.1.1 和引理 5.1.2 知

$$\deg_W(I-F,D) - \mathrm{index}_W(F,(0,0)) - \mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) = 1,$$

从而问题 (5.1.1) 有共存解.

再证必要性. 若问题 (5.1.1) 有共存解 (u,v), 由定理 5.1.2 的 (1) 知, $a > \lambda_1$ 并且 $u < \theta_a$. 又因 (u,v) 满足

$$\begin{cases} -\Delta v = v\big(c - v + duf(u,v)\big), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

所以

$$0 = \lambda_1\big(v - c - duf(u,v)\big) > \lambda_1\Big(-c - \frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\Big).$$

定理得证.

定理 5.1.4 只要下列条件之一成立, 问题 (5.1.1) 就没有共存解:

(1) $a \leqslant c$ 且 $b \geqslant (1+\alpha a)(1+\beta R)$;

(2) $b < (1+\alpha a)(1+\beta R)$ 且 $c - a \geqslant \big[1 - bf(a,R)\big]R$.

证明 假设问题 (5.1.1) 有共存解 (u,v). 对于情形 (1), 我们有

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_1\left(u-a+bvf(u,v)\right)\\ &> \lambda_1\left(v-c-duf(u,v)+\big(bf(u,v)-1\big)v\right)\\ &\geqslant \lambda_1\left(v-c-duf(u,v)+\big(bf(a,R)-1\big)v\right)\\ &\geqslant \lambda_1\left(v-c-duf(u,v)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

得矛盾.

对于情形 (2), 已知条件蕴涵 $a<c$. 同上我们有

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_1\left(u-a+bvf(u,v)\right)\\ &> \lambda_1\left(v-c-duf(u,v)+c-a+\big(bf(u,v)-1\big)v\right)\\ &\geqslant \lambda_1\left(v-c-duf(u,v)+c-a+\big(bf(a,R)-1\big)R\right)\\ &\geqslant \lambda_1\left(v-c-duf(u,v)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

也是矛盾. 证毕.

5.1.4 共存解的稳定性与多解性

我们先讨论 α 适当大, 或者 β 适当大时共存解的稳定性与多解性. 因为 α 与 β 的位置对等, 这里仅讨论 α 适当大的情况.

定理 5.1.5 假设 $a, c>\lambda_1$. 那么对于充分小的 $\varepsilon>0$, 存在 $\bar\alpha(\varepsilon)$ 适当大, 当 $\alpha\geqslant\bar\alpha(\varepsilon)$ 时问题 (5.1.1) 至少存在一个共存解 (u,v) 且满足

$$\theta_{a-\varepsilon}\leqslant u\leqslant\theta_a,\qquad \theta_c\leqslant v\leqslant\theta_{c+\varepsilon}. \tag{5.1.5}$$

证明 记 $\underline{U}=(\underline{u},\underline{v})=(\theta_{a-\varepsilon},\theta_c)$, $\bar U=(\bar u,\bar v)=(\theta_a,\theta_{c+\varepsilon})$. 易知函数

$$u\big(a-u-bvf(u,v)\big),\quad v\big(c-v+duf(u,v)\big)$$

在区间 $\langle\underline{U},\bar U\rangle$ 上 Lipschitz 连续. 如果能够证明 $\bar U$ 和 $\underline{U}$ 分别是问题 (5.1.1) 的上解和下解, 那么由方程组的上下解方法 (定理 3.7.1) 知, 问题 (5.1.1) 至少存在一个共存解 $U=(u,v)$ 并且满足 (5.1.5) 式.

为了证明 $\bar U$, $\underline{U}$ 是上下解, 我们只需验证下列不等式成立:

$$\Delta\bar u+\bar u\big(a-\bar u-b\underline{v}f(\bar u,\underline{v})\big)\leqslant 0, \tag{5.1.6}$$

$$\Delta\underline{u}+\underline{u}\big(a-\underline{u}-b\bar vf(\underline{u},\bar v)\big)\geqslant 0, \tag{5.1.7}$$

$$\Delta\bar v+\bar v\big(c-\bar v+d\bar uf(\bar u,\bar v)\big)\leqslant 0, \tag{5.1.8}$$

$$\Delta\underline{v}+\underline{v}\big(c-\underline{v}+d\underline{u}f(\underline{u},\underline{v})\big)\geqslant 0. \tag{5.1.9}$$

容易看出上面的不等式 (5.1.6) 和 (5.1.9) 自然成立, 下面验证不等式 (5.1.7) 和 (5.1.8).

直接计算知,

$$\Delta\underline{u}+\underline{u}\big(a-\underline{u}-b\bar{v}f(\underline{u},\bar{v})\big)=\theta_{a-\varepsilon}\big(\varepsilon-b\theta_{c+\varepsilon}f(\theta_{a-\varepsilon},\theta_{c+\varepsilon})\big),$$
$$\Delta\bar{v}+\bar{v}\big(c-\bar{v}+d\bar{u}f(\bar{u},\bar{v})\big)=\theta_{c+\varepsilon}\big(-\varepsilon+d\theta_a f(\theta_a,\theta_{c+\varepsilon})\big).$$

因为在 $\partial\Omega$ 上 $\theta_a(x)=0$, $\theta_{c+\varepsilon}(x)=0$, 所以在 $\partial\Omega$ 附近, 不等式 (5.1.7) 和 (5.1.8) 成立. 又因为当 $\alpha\longrightarrow\infty$ 时,

$$b\theta_{c+\varepsilon}f(\theta_{a-\varepsilon},\theta_{c+\varepsilon})\longrightarrow 0,\quad d\theta_a f(\theta_a,\theta_{c+\varepsilon})\longrightarrow 0$$

在 Ω 的紧子集上一致成立, 所以当 α 充分大时, 不等式 (5.1.7) 和 (5.1.8) 成立. 引理得证.

定理 5.1.6 假设 $a, c>\lambda_1$. 则当 α 适当大时, 问题 (5.1.1) 至少有一个线性稳定的共存解.

证明 选取 $0<\varepsilon_i\longrightarrow 0$. 由定理 5.1.5 知, 存在 $\bar{\alpha}(\varepsilon_i)$ 适当大, 当 $\alpha\geqslant\bar{\alpha}(\varepsilon_i)$ 时问题 (5.1.1) 至少有一个共存解, 记为 (u_α,v_α), 并且满足

$$\theta_{a-\varepsilon_i}\leqslant u_\alpha\leqslant\theta_a,\quad \theta_c\leqslant v_\alpha\leqslant\theta_{c+\varepsilon_i}. \tag{5.1.10}$$

我们断言: 当 i 适当大时, 这样得到的共存解 (u_α,v_α) 还是线性稳定的, 亦即问题 (5.1.1) 在 (u_α,v_α) 处的线性化问题的所有特征值都具有正实部.

如果该断言不对, 则存在 $\alpha_i\longrightarrow\infty$ 和满足 $\mathrm{Re}\,\mu_i\leqslant 0$ 的 μ_i, 以及满足 $\|\xi_i\|_2^2+\|\eta_i\|_2^2=1$ 的 (ξ_i,η_i), 使得

$$\begin{cases}-\Delta\xi_i-(a-2u_i-f_i)\,\xi_i+f_i^*\eta_i=\mu_i\xi_i, & x\in\Omega,\\ -\Delta\eta_i-g_i\xi_i-(c-2v_i+g_i^*)\,\eta_i=\mu_i\eta_i, & x\in\Omega,\\ \xi_i=\eta_i=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{5.1.11}$$

其中 $(u_i,v_i)=(u_{\alpha_i},v_{\alpha_i})$,

$$f_i=\frac{bv_i}{(1+\alpha_iu_i)^2(1+\beta v_i)},\quad f_i^*=\frac{bu_i}{(1+\alpha_iu_i)(1+\beta v_i)^2},$$
$$g_i=\frac{dv_i}{(1+\alpha_iu_i)^2(1+\beta v_i)},\quad g_i^*=\frac{du_i}{(1+\alpha_iu_i)(1+\beta v_i)^2}.$$

在问题 (5.1.11) 的两个方程的两边分别乘以 ξ_i 和 η_i 的共轭 $\bar{\xi}_i$ 和 $\bar{\eta}_i$ 并在 Ω 上积分, 再把所得结果相加得

$$\mu_i=\int_\Omega\big(|\nabla\xi_i|^2+|\nabla\eta_i|^2\big)\mathrm{d}x+\int_\Omega\big[|\xi_i|^2(f_i+2u_i-a)+f_i^*\eta_i\bar{\xi}_i\big]\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega\big[g_i\xi_i\bar{\eta}_i+|\eta_i|^2(c-2v_i+g_i^*)\big]\mathrm{d}x.$$

注意到 $\operatorname{Re}\mu_i \leqslant 0$, $\|\xi_i\|_2^2+\|\eta_i\|_2^2=1$, 并且 u_i 和 v_i 都有界 (定理 5.1.1) , 从上式可以看出 $\operatorname{Re}\mu_i$ 和 $\operatorname{Im}\mu_i$ 也都有界, 故 $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ 有界. 不妨假设 $\mu_i \longrightarrow \mu$ 且 $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$. 对问题 (5.1.11) 利用 L^p 理论推知, 对于任意的 $p>n$, 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中 ξ_i 和 η_i 都有界. 故存在子列, 不妨认为是它自身, 使得在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中 $\xi_i \longrightarrow \xi$, $\eta_i \longrightarrow \eta$.

注意到 $\varepsilon_i \longrightarrow 0$ 和式 (5.1.10), 在问题 (5.1.11) 中取极限知, 在弱的意义下 (μ,ξ,η) 满足

$$\begin{cases} -\Delta\xi-\xi\big(a-2\theta_a\big)=\mu\xi, & x\in\Omega, \\ -\Delta\eta-\eta\big(c-2\theta_c\big)=\mu\eta, & x\in\Omega, \\ \xi=\eta=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

由于 $\xi,\eta\in W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, 根据正则性理论, 在古典的意义下式 (5.1.12) 成立, 所以 μ 是实数, 故 $\mu\leqslant 0$.

若 $\xi\not\equiv 0$, 那么 μ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta\phi+(2\theta_a-a)\phi=\mu\phi, & x\in\Omega, \\ \phi=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的一个特征值, 从而 $0\geqslant\mu\geqslant\lambda_1(2\theta_a-a)$. 但是 $\lambda_1(2\theta_a-a)>\lambda_1(\theta_a-a)=0$, 矛盾. 故 $\xi\equiv 0$. 同理可证 $\eta\equiv 0$. 此与 $\|\xi\|_2^2+\|\eta\|_2^2=1$ 矛盾. 故定理成立.

定理 5.1.7 *若 $c>\lambda_1$, $\lambda_1<a<\lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$, 那么存在充分大的正常数 $\bar{\alpha}$, 当 $\alpha\geqslant\bar{\alpha}$ 时问题 (5.1.1) 至少有两个共存解.*

证明 由定理 5.1.6 知, 当 α 充分大时问题 (5.1.1) 至少有一个线性稳定的共存解 $(\tilde{u},\tilde{v})$, 所以在 $\overline{W}_{(\tilde{u},\tilde{v})}$ 上算子 $I-F'(\tilde{u},\tilde{v})$ 可逆. 注意到 $\overline{W}_{(\tilde{u},\tilde{v})}=X^2=S_{(\tilde{u},\tilde{v})}$, 因此 $F'(\tilde{u},\tilde{v})$ 没有 α 性质. 又因为 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是线性稳定的, 根据定理 4.9.2 的 (2) 和定理 4.7.1 便可推得

$$\operatorname{index}_W(F,(\tilde{u},\tilde{v}))=1.$$

如果问题 (5.1.1) 只有这一个共存解, 由引理 5.1.1 和引理 5.1.2, 以及不动点指数的可加性得

$$\begin{aligned} 1=&\deg_W(I-F,D) \\ =&\operatorname{index}_W(F,(0,0))+\operatorname{index}_W(F,(\theta_a,0)) \\ &+\operatorname{index}_W(F,(0,\theta_c))+\operatorname{index}_W(F,(\tilde{u},\tilde{v})) \\ =&0+0+1+1, \end{aligned}$$

这是一个矛盾, 定理得证.

下面讨论当 $b \longrightarrow 0^+$ 时, 共存解的稳定性. 如果问题 (5.1.1) 有共存解, 由定理 5.1.2 的结论 (1) 和定理 5.1.3 的结论 (2) 知, $a > \lambda_1$, $c > \lambda_1\left(-\dfrac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$. 记 v^* 是问题

$$\begin{cases} -\Delta v = v\big(c - v + d\theta_a f(\theta_a, v)\big), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.13}$$

的唯一正解.

定理 5.1.8 如果 $a > \lambda_1$, 则当 $b \longrightarrow 0^+$ 时, 问题 (5.1.1) 的共存解 $(u,v) \longrightarrow (\theta_a, v^*)$.

证明 要证明的是: 当 $b \longrightarrow 0^+$ 时, 问题 (5.1.1) 的共存解收敛于问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u(a - u), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v\big(c - v + duf(u,v)\big), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.14}$$

的唯一正解.

假设 $b_i \longrightarrow 0^+$, 而 (u_i, v_i) 是问题 (5.1.1) 对应于 $b = b_i$ 的共存解. 利用定理 5.1.2 的结论 (1) 和定理 5.1.3 的结论 (2) 容易看出,

$$a > \lambda_1, \quad c > \lambda_1\left(-\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right). \tag{5.1.15}$$

由定理 5.1.1, (u_i, v_i) 关于 i 一致有界. 根据椭圆型方程的正则性理论, $|(u_i, v_i)|_{2+\alpha}$ 关于 i 有界. 从而存在 $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 的子列, 仍记为它自身, 以及非负函数对 $(u, v) \in [C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})]^2$, 使得在 $[C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})]^2$ 中 $(u_i, v_i) \longrightarrow (u, v)$. 容易看出 (u, v) 是问题 (5.1.14) 的非负解. 下面证明在 Ω 内 $u(x), v(x) > 0$.

如果 $u \equiv 0$, 则 $\|u_i\|_\infty \longrightarrow 0$. 记 $\hat{u}_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$, 那么 $\hat{u}_i$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}_i = \hat{u}_i\big(a - u_i - b_i v_i f(u_i, v_i)\big), & x \in \Omega, \\ u_i = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

同上, $|\hat{u}_i|_{2+\alpha}$ 关于 i 有界. 从而存在 $\{\hat{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的子列, 仍记为它自身, 以及非负函数 $\hat{u} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, 使得在 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $\hat{u}_i \longrightarrow \hat{u}$. 显然 $\|\hat{u}\|_\infty = 1$, 并且 $\hat{u}$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = au, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由此得 $a=\lambda_1$, 这与已知条件相矛盾, 因此 $u\not\equiv 0$. 再由强最大值原理知, 在 Ω 内 $u(x)>0$.

若 $v\equiv 0$, 同上可以推出存在非负函数 $\hat{v}\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, 在 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $\hat{v}_i:=\dfrac{v_i}{\|v_i\|_\infty}\longrightarrow\hat{v}$, $\|\hat{v}\|_\infty=1$, 并且 $\hat{v}$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta v=v\big(c+d\theta_a f(\theta_a,0)\big), & x\in\Omega,\\ v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

因为 $\hat{v}$ 非负, 所以在 Ω 内 $\hat{v}(x)>0$, 从而有

$$c=\lambda_1\left(-\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right),$$

这与 (5.1.15) 式相矛盾. 因而 $v\not\equiv 0$, 于是在 Ω 内 $v(x)>0$. 定理得证.

定理 5.1.9 *如果 $a>\lambda_1$, 则存在正常数 b^*, 当 $b\leqslant b^*$ 时, 问题 (5.1.1) 至多存在一个共存解, 并且该共存解 (若存在) 还是线性稳定的.*

证明 视 b 为参数. 如果共存解存在, 其唯一性可由隐函数定理推出. 与定理 5.1.6 的证明类似, 若共存解存在, 它一定是线性稳定的. 细节留作习题. 证毕.

5.1.5 共存解的分支、稳定性与多解性

在上一小节, 我们讨论了当 α 适当大, 或者 β 适当大, 或者 b 适当小时, 共存解的稳定性和多解性. 在本小节我们分别视 a 和 c 为分支参数, 利用分支理论研究共存解的分支, 以及当参数 d 适当小时共存解的多解性和分支共存解的稳定性.

定理 5.1.10

(1) 假设 $c>\lambda_1$, 并记 $\tilde{a}=\lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$. 那么点 $(0,\theta_c,\tilde{a})$ 是问题 (5.1.1) 的共存解的分支点, 并且当 $0<s\ll 1$ 时, 分支出来的共存解 $\big(u(s),v(s),a(s)\big)$ 具有如下形式

$$\begin{cases}u(s)=s\Phi+O(s^2),\\ v(s)=\theta_c+s\Psi+O(s^2),\\ a(s)=\tilde{a}+a_1 s+O(s^2),\end{cases}$$

其中

$$\Psi=d(-\Delta-c+2\theta_c)^{-1}\left(\frac{\theta_c}{1+\beta\theta_c}\Phi\right),$$

Φ 是与 $\tilde{a}$ 对应的特征函数且 $\displaystyle\int_\Omega\Phi^2\mathrm{d}x=1$. 将 $\big(u(s),v(s),a(s)\big)$ 代入问题 (5.1.1) 的

第一个方程, 可得

$$a_1 = \frac{\int_\Omega \left[(1+\beta\theta_c)^2\Phi^2 - \alpha b\theta_c(1+\beta\theta_c)\Phi^2 + b\Phi\Psi\right]\mathrm{d}x}{\int_\Omega (1+\beta\theta_c)^2\Phi\mathrm{d}x}. \tag{5.1.16}$$

(2) 假设 $a > \lambda_1$, 并记 $\tilde{c} = \lambda_1\left(-\frac{d\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\right)$. 那么点 $(\theta_a, 0, \tilde{c})$ 是问题 (5.1.1) 的共存解的分支点, 并且当 $0 < s \ll 1$ 时, 分支出来的共存解 $\big(u(s), v(s), c(s)\big)$ 具有如下形式

$$\begin{cases} u(s) = \theta_a + s\widetilde{\Psi} + O(s^2), \\ v(s) = s\widetilde{\Phi} + O(s^2), \\ c(s) = \tilde{c} + c_1 s + O(s^2), \end{cases}$$

其中

$$\widetilde{\Psi} = b(-\Delta - a + 2\theta_a)^{-1}\left(-\frac{\theta_a}{1+\alpha\theta_a}\widetilde{\Phi}\right),$$

$\widetilde{\Phi}$ 是与 $\tilde{c}$ 对应的特征函数且满足 $\int_\Omega \widetilde{\Phi}^2\mathrm{d}x = 1$. 将 $\big(u(s), v(s), c(s)\big)$ 代入 (5.1.1) 的第二个方程, 我们有

$$c_1 = \frac{\int_\Omega \left[(1+\alpha\theta_a)^2\widetilde{\Phi}^2 + \beta d\theta_a(1+\alpha\theta_a)\widetilde{\Phi}^2 - d\widetilde{\Phi}\widetilde{\Psi}\right]\mathrm{d}x}{\int_\Omega (1+\alpha\theta_a)^2\widetilde{\Phi}\mathrm{d}x}.$$

证明　仅证结论 (1). 结论 (2) 的证明留作习题.

定义映射 $\mathcal{F}: E\times\mathbb{R} \longrightarrow E$,

$$\mathcal{F}(u,v,a) = \begin{pmatrix} \Delta u + u\big(a - u - bvf(u,v)\big) \\ \Delta v + v\left(c - v + duf(u,v)\right) \end{pmatrix}.$$

对于任意的 $(\xi, \eta) \in E$, 简单计算知

$$\mathcal{F}_{(u,v)}(u,v,a)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\xi + \left(a - 2u - \frac{bvf(u,v)}{1+\alpha u}\right)\xi - \frac{buf(u,v)}{1+\beta v}\eta \\ \Delta\eta + \frac{dvf(u,v)}{1+\alpha u}\xi + \left(c - 2v + \frac{duf(u,v)}{1+\beta v}\right)\eta \end{pmatrix},$$

于是

$$\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta\xi+\Big(\tilde{a}-\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\Big)\xi\\ \Delta\eta+\dfrac{d\theta_c}{1+\beta\theta_c}\xi+(c-2\theta_c)\eta\end{pmatrix}.$$

第一步 证明

$$\dim(\mathscr{N}\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a}))=1,\quad \mathscr{N}\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a})=\mathrm{span}\{(\varPhi,\varPsi)\}.$$

事实上, 如果存在 $(0,0)\neq(\xi,\eta)\in E$, 使得 $\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a})(\xi,\eta)=(0,0)$, 那么

$$\begin{cases}\Delta\xi+\Big(\tilde{a}-\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\Big)\xi=0, & x\in\Omega,\\ \Delta\eta+\dfrac{d\theta_c}{1+\beta\theta_c}\xi+(c-2\theta_c)\eta=0, & x\in\Omega,\\ \xi=\eta=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

由于算子 $\Delta+c-2\theta_c$ 可逆, 故 $\xi\neq0$. 又因为 $\tilde{a}=\lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$, 所以 $\xi\in\mathrm{span}\{\varPhi\}$, 进而推出 $\eta\in\mathrm{span}\{\varPsi\}$.

第二步 证明 $\mathrm{Codim}\big(\mathscr{R}\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a})\big)=1$.

事实上, 若 $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\in\mathscr{R}\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a})$, 则存在 $(\xi,\eta)\in E$ 使得

$$\begin{cases}\Delta\xi+\Big(\tilde{a}-\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\Big)\xi=\tilde{\xi}, & x\in\Omega,\\ \Delta\eta+\dfrac{d\theta_c}{1+\beta\theta_c}\xi+(c-2\theta_c)\eta=\tilde{\eta}, & x\in\Omega,\\ \xi=\eta=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{5.1.17}$$

因为 $\varPhi$ 是与 $\tilde{a}=\lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$ 对应的特征函数, 所以 $\displaystyle\int_\Omega\varPhi\tilde{\xi}\mathrm{d}x=0$, 故 $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ 与 $(\varPhi,0)$ 正交.

反之, 如果 $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ 与 $(\varPhi,0)$ 正交, 那么问题 (5.1.17) 的第一个方程有解 ξ (同于习题 2.13). 又因为算子 $\Delta+c-2\theta_c$ 可逆, 所以问题 (5.1.17) 的第二个方程有解 η. 从而 $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\in\mathscr{R}\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a})$.

第三步 因为 $\mathscr{R}\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a})$ 与 $(\varPhi,0)$ 正交, 并且 $\mathcal{F}_{(u,v),a}(0,\theta_c,\tilde{a})(\varPhi,\varPsi)=(\varPhi,0)$, 所以

$$\mathcal{F}_{(u,v),a}(0,\theta_c,\tilde{a})(\varPhi,\varPsi)\notin\mathscr{R}\mathcal{F}_{(u,v)}(0,\theta_c,\tilde{a}).$$

利用分支定理 4.5.2 可得结论. 证毕.

定理 5.1.11 假设 $c > \lambda_1$ 并且 $\int_\Omega \Phi^3\left(1-\frac{\alpha b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)\mathrm{d}x \neq 0$. 那么当 d 充分小时, 在点 $(0,\theta_c,\tilde{a})$ 附近的共存解分支 $(u(s),v(s))$ 是非退化的, 并且当 $\int_\Omega \Phi^3\Big(1-\frac{\alpha b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\Big)\mathrm{d}x > 0$ 时, $(u(s),v(s))$ 是线性稳定的, 当 $\int_\Omega \Phi^3\left(1-\frac{\alpha b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)\mathrm{d}x < 0$ 时, $(u(s),v(s))$ 不是线性稳定的. 由此又可以推出, 如果由式 (5.1.16) 确定的 $a_1 < 0$, 那么当 d 充分小并且 a 落在 $\tilde{a}$ 的左邻域内时, 问题 (5.1.1) 至少有两个共存解.

证明 先证定理的前半部分结论. 为了书写方便, 简记 $a(s) = a$, $(u(s),v(s)) = (u,v)$. 在 (u,v) 处的线性化问题可以写成

$$\mathscr{L}(s,d)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \mu(s,d)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},$$

其中,

$$\mathscr{L}(s,d) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix},$$

$$M_{11} = -\Delta - \left(a - 2u - \frac{bvf(u,v)}{1+\alpha u}\right), \quad M_{12} = \frac{buf(u,v)}{1+\beta v},$$

$$M_{21} = -\frac{dvf(u,v)}{1+\alpha u}, \quad M_{22} = -\Delta - \left(c - 2v + \frac{duf(u,v)}{1+\beta v}\right).$$

容易看出当 $s \longrightarrow 0$, $d \longrightarrow 0$ 时,

$$\mathscr{L}(s,d) \longrightarrow \mathscr{L}_0 := \begin{pmatrix} -\Delta + \left(\frac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c} - \tilde{a}\right) & 0\\ 0 & -\Delta - (c - 2\theta_c)\end{pmatrix}.$$

因为$\tilde{a} = \lambda_1\left(\frac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$, 故算子 $-\Delta + \frac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c} - \tilde{a}$ 的最小特征值是 0. 又因为 $c = \lambda_1(\theta_c) < \lambda_1(2\theta_c)$, 所以算子 $-\Delta - (c-2\theta_c)$ 的最小特征值大于零. 由定理 2.5.1 知, 0 是算子 $\mathscr{L}_0$ 的最小特征值 (对应的特征函数是 $(\Phi,0)$), 而且 $\mathscr{L}_0$ 的其他特征值都是正的并远离 0. 由摄动定理 [23] 知, 当 s,d 适当小时, $\mathscr{L}(s,d)$ 存在唯一的特征值 $\mu(s,d)$ 满足 $\lim\limits_{s,\,d\to 0^+}\mu(s,d) = 0$, 并且 $\mathscr{L}(s,d)$ 的其他特征值都有正实部且远离 0. 为了书写方便, 我们简记 $\mathscr{L}(s,d) = \mathscr{L}$, $\mu(s,d) = \mu$.

下面讨论当 $s,d > 0$ 适当小时 $\mathrm{Re}\,\mu$ 的符号. 选取与 μ 对应的特征函数 (ξ,η), 使得 $(\xi,\eta) \longrightarrow (\Phi,0)$. 用 u 乘以 $\mathscr{L}(\xi,\eta) = \mu(\xi,\eta)$ 的第一个方程并在 Ω 上积分得

$$-\int_\Omega u\Delta\xi - \int_\Omega u\xi\left(a - 2u - \frac{bvf(u,v)}{1+\alpha u}\right) + \int_\Omega \frac{bu^2 f(u,v)}{1+\beta v}\eta = \mu\int_\Omega u\xi. \quad (5.1.18)$$

问题 (5.1.1) 的第一个方程两边乘以 ξ, 再积分得

$$-\int_\Omega u\Delta\xi\mathrm{d}x=-\int_\Omega \xi\Delta u\mathrm{d}x=\int_\Omega \xi u\big(a-u-bvf(u,v)\big)\mathrm{d}x.$$

由此及式 (5.1.18) 得

$$\mu\int_\Omega u\xi\mathrm{d}x=\int_\Omega \xi u^2\left(1-\frac{b\alpha vf(u,v)}{1+\alpha u}\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{bu^2f(u,v)}{1+\beta v}\eta\mathrm{d}x.$$

注意到 $(u,v)=(s\Phi+O(s^2),\theta_c+s\Psi+O(s^2))$, 并且 $\xi\longrightarrow\Phi$, $\eta\longrightarrow 0$, 上式两边除以 s^2 再取极限得

$$\lim_{d,s\to 0^+}\frac{\mu}{s}=\frac{\displaystyle\int_\Omega \Phi^3\Big(1-\frac{\alpha b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\Big)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega \Phi^2\mathrm{d}x}\neq 0. \tag{5.1.19}$$

从而当 s,d 适当小时, $\mathrm{Re}\,\mu\neq 0$. 又因为 $\mathscr{L}$ 的其他特征值都有正实部且远离 0, 所以共存解分支 $(u(s),\,v(s))$ 是非退化的.

前面已经说明, 当 $0<s,d\ll 1$ 时, 除 $\mu(s,d)$ 外的其他特征值都有正实部且远离 0, 所以共存解分支 $(u(s),\,v(s))$ 的线性稳定性完全由 $\mu(s,d)$ 的实部的符号来决定. 从极限 (5.1.19) 可以看出, 当 $0<s,d\ll 1$ 时, $\mu(s,d)$ 的实部与积分 $\displaystyle\int_\Omega \Phi^3\left(1-\frac{\alpha b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)\mathrm{d}x$ 同号, 所以定理的前半部分结论成立.

再证定理的后半部分结论. 假设问题 (5.1.1) 只有一个共存解 $(\hat u,\hat v)$. 因为 $a_1<0$, 所以当 d 充分小并且 a 落在 $\tilde a$ 的左邻域内时, $(\hat u,\hat v)$ 是从 $(0,\theta_c,\tilde a)$ 分支出来的共存解, 即 $(\hat u,\hat v)=(u(s),v(s))$. 从上面已证结果我们知道它还是非退化的, 因而 $I-F'(u(s),v(s)):\ \overline{W}_{(u(s),v(s))}\longrightarrow\overline{W}_{(u(s),v(s))}$ 是可逆的. 同于定理 5.1.7 的证明, $F'(u(s),v(s))$ 没有 α 性质, 再由定理 4.9.2 知, $\mathrm{index}_W(F,(u(s),v(s)))=\pm1$. 注意到 $\lambda_1<a<\tilde a=\lambda_1\left(\dfrac{b\theta_c}{1+\beta\theta_c}\right)$, 利用引理 5.1.1, 引理 5.1.2 和不动点指数的可加性便得

$$\begin{aligned}1=&\deg_W(I-F,D)\\=&\mathrm{index}_W(F,(0,0))+\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0))\\&+\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_c))+\mathrm{index}_W(F,(\hat u,\hat v))\\=&0+0+1\pm1.\end{aligned}$$

这是一个矛盾. 定理得证.

5.2　一个带有 Holling II 型响应函数的捕食模型

本节讨论带有 Holling II 型响应函数的捕食模型的椭圆型方程组的齐次 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(a - u - \dfrac{v}{1+mu}\right), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v\left(b - \dfrac{mv}{m+u}\right), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.1}$$

的共存解的存在性、确切个数和稳定性, 其中 a, b 及 m 都是正常数.

用 λ_1 表示在 Ω 上算子 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的主特征值. 容易看出, 当 $a \leqslant \lambda_1$ 或者 $b \leqslant \lambda_1$ 时, 问题 (5.2.1) 没有共存解. 因此下面我们总假定 $a, b > \lambda_1$ 成立. 同上, 用 θ_a 表示边值问题 (3.5.1) 的唯一正解.

利用上下解方法易证, 当 $a > \lambda_1((m+a)\theta_b/m)$ 时, 问题

$$\begin{cases} -\Delta w = w\left(a - \dfrac{(m+a)\theta_b}{m} - w\right), & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.2}$$

有唯一正解, 记为 u_m^*.

5.2.1　共存解的存在性

我们先给出共存解的先验估计.

定理 5.2.1　假定 (u,v) 是问题 (5.2.1) 的共存解, 则有

$$u(x) < \theta_a(x) < a, \quad \theta_b(x) < v(x) < \frac{(m+a)\theta_b(x)}{m} < \frac{(m+a)b}{m}, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

此外, 当 $a > \lambda_1((m+a)\theta_b/m)$ 时, 还有 $u > u_m^*$, 其中 u_m^* 是问题 (5.2.2) 的唯一正解.

证明　由于 $u, v > 0$, 故有

$$\begin{cases} -\Delta u < u(a-u), & x \in \Omega, \\ -\Delta v > v(b-v), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

直接利用习题 3.7 得, $u < \theta_a$. 上面的不等式又说明 v 是问题

$$\begin{cases} -\Delta w = w(b - w), & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.3}$$

的一个正的严格上解. 因为 $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} < 0$, 先对问题 (5.2.3) 利用上下解方法, 再利用正解的唯一性, 最后利用强极值原理, 便可推知 $v > \theta_b$.

我们已经知道 $u < \theta_a < a$, 利用问题 (5.2.1) 中 v 的方程可得

$$\begin{cases} -\Delta v < v\left(b - \dfrac{mv}{m+a}\right), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

这说明 v 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta v = v\left(b - \dfrac{mv}{m+a}\right), & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.4}$$

的一个正的严格下解. 直接验证知, $\dfrac{m+a}{m}\theta_b$ 是问题 (5.2.4) 的正解. 利用习题 3.7 又得, $v < \dfrac{m+a}{m}\theta_b$.

第二个结论的证明留作习题. 证毕.

为了后面的需要, 我们引进辅助问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(a - u - \dfrac{tv}{1+mu}\right), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v\left(b - \dfrac{mv}{m+tu}\right), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.5}$$

其中 $t \in [0,1]$.

取 E, K 和 W 同于 5.1.2 节,

$$D = \big\{(u,v) \in W : u < a,\ v < (m+a)b/m\big\}.$$

对于 $t \in [0,1]$, 定义

$$F_t(u,v) = (C - \Delta)^{-1}\left(u\left(a + C - u - \frac{tv}{1+mu}\right), v\left(b + C - \frac{mv}{m+tu}\right)\right),$$

其中 C 是适当大的正常数. 那么 $F_t(u,v):[0,1]\times D\longrightarrow W$ 是正的紧算子. 对于固定的 $t\in[0,1]$, 显而易见, 求解问题 (5.2.5) 的非负解等价于在 W 中寻找算子 F_t 的不动点. 方便起见, 记 $F=F_1$. 另一方面, 求解问题 (5.2.1) 的共存解等价于寻找算子 F 的正不动点.

对于固定的 $t\in[0,1]$, 假设 (u,v) 是问题 (5.2.5) 的非负解, 同于定理 5.2.1, 我们有

$$u\leqslant\theta_a<a,\quad \theta_b\leqslant v\leqslant\frac{1}{m}(m+at)\theta_b<\frac{1}{m}(m+a)b, \tag{5.2.6}$$

即 $(u,v)\in D$. 从而度 $\deg_W(I-F_t,D)$ 有定义, 且由同伦不变性知, 度 $\deg_W(I-F_t,D)$ 不依赖于 $t\in[0,1]$. 另一方面, $(0,0)$, $(\theta_a,0)$ 和 $(0,\theta_b)$ 是问题 (5.2.1) 仅有的平凡解和非负半平凡解. 同于 5.1 节, 我们有

引理 5.2.1 *假定 $a,b>\lambda_1$. 则*

(1) $\deg_W(I-F,D)=1$;

(2) $\mathrm{index}_W(F,(0,0))=\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0))=0$;

(3) *若 $a>b$, 则 $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b))=0$. 若 $a<b$, 则 $\mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b))=1$.*

同于 5.1 节, 可以证明下面的两个定理.

定理 5.2.2 *假定 $a>b>\lambda_1$, 则问题 (5.2.1) 至少有一个共存解.*

定理 5.2.3 *对于固定的 $b>\lambda_1$, 存在正数 b_0 满足 $\lambda_1<b_0<b$, 当 $a\in[b_0,\infty)$ 时问题 (5.2.1) 有共存解, 且当 $a\in(b_0,b)$ 时问题 (5.2.1) 至少有两个共存解.*

证明留作习题.

本节的主要目的是固定 $b>\lambda_1$, 视 a,m 为参数, 讨论当 m 很大而 a 落在一个适当的区间内时, 共存解的多解性、精确个数和稳定性. 如果没有特殊说明, 我们用 M, $M(\varepsilon)$ 等来表示不依赖于 a 的正常数.

5.2.2 共存解的渐近性质和估计

为了陈述和证明本节的主要定理, 我们先讨论共存解的渐近性质和估计, 即下面的系列引理.

引理 5.2.2 *对于任给的常数 $0<\varepsilon\ll1$, 存在正常数 $M=M(\varepsilon)$, 当 $a\geqslant\lambda_1+\varepsilon$ 以及 $m\geqslant M$ 时, 问题 (5.2.1) 有共存解 $(\tilde u,\tilde v)$ 且满足*

$$\theta_{a-\varepsilon/2}\leqslant\tilde u\leqslant\theta_a,\quad \theta_b\leqslant\tilde v\leqslant\theta_{b+\varepsilon/2}.$$

证明 为了证明该引理, 只需验证

$$(\bar u,\bar v)=(\theta_a,\theta_{b+\varepsilon/2}),\quad (\underline{u},\underline{v})=(\theta_{a-\varepsilon/2},\theta_b)$$

是问题 (5.2.1) 的一对上下解, 即验证

$$\begin{cases} \Delta\bar{u}+\bar{u}\left(a-\bar{u}-\dfrac{\underline{v}}{1+m\bar{u}}\right)\leqslant 0, & x\in\Omega, \\ \Delta\underline{u}+\underline{u}\left(a-\underline{u}-\dfrac{\bar{v}}{1+m\underline{u}}\right)\geqslant 0, & x\in\Omega, \\ \Delta\bar{v}+\bar{v}\left(b-\dfrac{m\bar{v}}{m+\bar{u}}\right)\leqslant 0, & x\in\Omega, \\ \Delta\underline{v}+\underline{v}\left(b-\dfrac{m\underline{v}}{m+\underline{u}}\right)\geqslant 0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{5.2.7}$$

取

$$M(\varepsilon)=\max\left\{\frac{a(2b+\varepsilon)}{\varepsilon},\ \sup\frac{2\theta_{b+\varepsilon/2}(x)}{\varepsilon\theta_{a-\varepsilon/2}(x)}\right\}.$$

通过简单的分析和计算知, 只要 $m\geqslant M(\varepsilon)$, 式 (5.2.7) 中的所有不等式都成立. 证毕.

引理 5.2.3 *存在正常数 M, 当 $m\geqslant M$ 时, 对所有的 $a\geqslant b$ 以及 $t\in[0,1]$, 问题 (5.2.5) 的任意共存解 (u,v) 都满足 $u\geqslant\theta_{(b+\lambda_1)/2}$.*

证明 采用反证法. 如果结论不成立, 则存在序列 $m_i\longrightarrow\infty$, $a_i\geqslant b$, $t_i\in[0,1]$, 以及问题 (5.2.5) 对应于 $(a,m,t)=(a_i,m_i,t_i)$ 的共存解 $\{(u_i,v_i)\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $u_i\geqslant\theta_{(b+\lambda_1)/2}$ 不成立. 我们分几种情况来导出矛盾.

情形 1 $t_i\longrightarrow t_0\in[0,1)$. 利用估计式 (5.2.6) 知, $v_i\leqslant(m_i+a_it_i)\theta_b/m_i$. 再利用 $\theta_b<b$ 推得

$$\begin{aligned} -\Delta u_i &\geqslant u_i\left(a_i-\frac{t_i(m_i+a_it_i)\theta_b}{m_i(1+m_iu_i)}-u_i\right) \\ &\geqslant u_i\left[a_i\left(1-\frac{bt_i^2}{m_i}\right)-t_i\theta_b-u_i\right] \\ &\geqslant u_i(t^*b-t_0\theta_b-u_i) \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

对任意给定的小于 1 且靠近 1 的 t^* 以及所有充分大的 i 都成立. 从而 $u_i\geqslant\tilde{w}$, 其中 $\tilde{w}$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta w+q(x)w=aw-w^2, & x\in\Omega, \\ w=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.9}$$

当 $a=t^*b$, $q(x)=t_0\theta_b(x)$ 时的唯一正解. 重写

$$\begin{aligned}
&a_i-\frac{t_i(m_i+a_it_i)\theta_b}{m_i(1+m_iu_i)}\\
=&a_i\left(1-\frac{t_i^2\theta_b}{m_i(1+m_iu_i)}\right)-\frac{t_i\theta_b}{1+m_iu_i}\\
=&\frac{b+\lambda_1}{2}+a_i\left(1-\frac{t_i^2\theta_b}{m_i(1+m_iu_i)}\right)-\frac{b+\lambda_1}{2}-\frac{t_i\theta_b}{1+m_iu_i}.
\end{aligned}\tag{5.2.10}$$

因为 $a_i\geqslant b>\lambda_1$, $0\leqslant t_i\leqslant 1$, $m_i\longrightarrow\infty$, 所以存在 $\varepsilon>0$, 当 i 充分大时有

$$a_i\left(1-\frac{t_i^2\theta_b}{m_i(1+m_iu_i)}\right)-\frac{b+\lambda_1}{2}>\varepsilon.\tag{5.2.11}$$

注意到 $\theta_b\big|_{\partial\Omega}=0$ 并且 θ_b 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 故存在 $\delta>0$, 使得在 $\Omega_\delta:=\big\{x\in\bar{\Omega}:d(x,\partial\Omega)\leqslant\delta\big\}$ 上 $\theta_b<\varepsilon$. 从而在 Ω_δ 上 $t_i\theta_b/(1+m_iu_i)<\varepsilon$ 对于所有的 i 都成立. 又因为在 Ω 上 $u_i\geqslant\tilde{w}>0$, 所以当 i 充分大时, 在 $\Omega\setminus\Omega_\delta$ 上 $t_i\theta_b/(1+m_iu_i)<\varepsilon$. 故当 i 充分大时,

$$t_i\theta_b/(1+m_iu_i)<\varepsilon,\quad\forall\, x\in\Omega.$$

此式结合式 (5.2.11) 和式 (5.2.10) 便推得, 当 i 适当大时,

$$a_i-\frac{t_i(m_i+a_it_i)\theta_b}{m_i(1+m_iu_i)}>\frac{b+\lambda_1}{2}.$$

再由式 (5.2.8) 中的第一个不等式, 当 i 适当大时, 有

$$\begin{cases}-\Delta u_i>u_i\big[(b+\lambda_1)/2-u_i\big], & x\in\Omega,\\ u_i=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

根据问题 (3.5.1) 的正解的唯一性, $u_i\geqslant\theta_{(b+\lambda_1)/2}$. 此与反证法中的假设矛盾.

情形 2 $t_i\longrightarrow 1$ 且 $a_i\longrightarrow\infty$. 利用式 (5.2.8) 的第二个不等式知, 对于任意固定的适当大的 a^*, 存在 i_0 适当大使得对所有的 $i\geqslant i_0$, 有

$$-\Delta u_i\geqslant u_i\big[a_i(1-bt_i^2/m_i)-t_i\theta_b-u_i\big]\geqslant u_i(a^*-\theta_b-u_i).$$

同上可得 $u_i\geqslant w^*$, 其中 w^* 是 $a=a^*$, $q(x)=\theta_b(x)$ 时问题 (5.2.9) 的唯一正解. 同上可以导出矛盾.

情形 3 $t_i\longrightarrow 1$ 且 $a_i\longrightarrow a\in(b,\infty)$. 记

$$h_i=\frac{1}{1+m_iu_i},$$

那么在 $L^2(\Omega)$ 中 $h_i\rightharpoonup h$, 并且 $h\in L^\infty(\Omega)$, $0\leqslant h\leqslant 1$. 由于

$$\theta_b\leqslant v_i\leqslant\frac{(m_i+a_it_i)\theta_b}{m_i},$$

所以 $v_i\longrightarrow \theta_b$ 点点成立. 利用标准的椭圆型方程的正则性理论和嵌入定理知, 在 $C^1(\bar\Omega)$ 中 $v_i\longrightarrow\theta_b$.

我们断言, 必存在正常数 α 和子序列, 仍记为 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, 使得 $\|u_i\|_\infty\geqslant\alpha$. 如若不然, 则 $u_i\longrightarrow 0$ 在 $\bar\Omega$ 上一致成立. 记

$$\tilde u_i=\frac{u_i}{\|u_i\|_\infty}.$$

对 $\tilde u_i$ 的方程利用正则性理论和嵌入定理可以推出, 在 $C^1(\bar\Omega)$ 中 $\tilde u_i\longrightarrow\tilde u\geqslant 0, \|\tilde u\|_\infty=1$, 并且 $\tilde u$ 是问题

$$\begin{cases}-\Delta\tilde u=\tilde u(a-\theta_b h), & x\in\Omega,\\ \tilde u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的非负非平凡弱解. 因为 $h\in L^\infty(\Omega)$, 所以对于任何 $1<p<\infty$, 有 $\tilde u\in W_0^{2,p}(\Omega)$. 利用弱解的 Harnack 不等式 (定理 B.1.10) 推知, 在 Ω 内 $\tilde u>0$. 再利用定理 2.2.6 得, $a=\lambda_1(\theta_b h)\leqslant\lambda_1(\theta_b)=b$. 此于 $a>b$ 的条件矛盾.

从而存在正常数 α 和子序列, 仍记为 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, 使得 $\|u_i\|_\infty\geqslant\alpha$. 对 u_i 的方程利用正则性理论和嵌入定理, 不妨认为在 $C^1(\bar\Omega)$ 中 $u_i\longrightarrow u$, 且 u 是问题

$$\begin{cases}-\Delta u=u(a-u-\theta_b h), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的一个非负解, $\|u\|_\infty\geqslant\alpha>0$. 根据 Harnack 不等式, 在 Ω 内 $u>0$. 因为 $m_i\longrightarrow\infty$, 所以在 Ω 的任何一个紧子区域内 $h_i\longrightarrow 0$ 一致成立. 因此 $h=0$, 从而 $u=\theta_a$. 又因为 $\theta_a>\theta_{(b+\lambda_1)/2}$, 并且在 $C^1(\bar\Omega)$ 中 $u_i\longrightarrow u$, 故当 i 适当大时, 有 $u_i>\theta_{(b+\lambda_1)/2}$. 此与反证法中的假设矛盾.

情形 4 $t_i\longrightarrow 1$ 且 $a_i\longrightarrow b^+$. 如果存在子序列, 仍记为 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, 使得 $\|u_i\|_\infty\geqslant\alpha>0$. 同于情形 3 的讨论便可推得在 $C^1(\bar\Omega)$ 中 $u_i\longrightarrow\theta_a$. 同上可以导出矛盾.

从而有 $\|u_i\|_\infty\longrightarrow 0$. 这里采用情形 3 的讨论中的记号. 同于情形 3 的讨论, 在 $C^1(\bar\Omega)$ 中 $\tilde u_i\longrightarrow\tilde u>0$, 并且 $\tilde u$ 是问题

$$\begin{cases}-\Delta\tilde u=\tilde u(b-\theta_b h), & x\in\Omega,\\ \tilde u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{5.2.12}$$

的解. 用 $\tilde u$ 乘以 θ_b 的方程, 用 θ_b 乘以问题 (5.2.12) 中的方程, 并在 Ω 上积分, 再把所得结果联立得

$$\int_\Omega\tilde u\theta_b^2(1-h)=0.$$

因为 $h \leqslant 1$, 由上式知 $h=1$, 故 $\tilde{u}=\theta_b/\|\theta_b\|_\infty$.

用 $\theta_b/\|u_i\|_\infty^2$ 乘以 u_i 的方程, 用 $\tilde{u}_i/\|u_i\|_\infty$ 乘以 θ_b 的方程, 并在 Ω 上积分, 再把所得结果联立, 又得

$$\begin{aligned}\frac{a_i-b}{\|u_i\|_\infty}\int_\Omega \theta_b\tilde{u}_i\mathrm{d}x&=\int_\Omega \frac{\theta_b\tilde{u}_i(h_it_iv_i-\theta_b)}{\|u_i\|_\infty}\mathrm{d}x-m_i\int_\Omega \theta_b^2\tilde{u}_i^2h_i\mathrm{d}x+\int_\Omega \theta_b\tilde{u}_i^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_\Omega \frac{\theta_b\tilde{u}_ih_i(t_iv_i-\theta_b)}{\|u_i\|_\infty}\mathrm{d}x-m_i\int_\Omega \theta_b^2\tilde{u}_i^2h_i\mathrm{d}x+\int_\Omega \theta_b\tilde{u}_i^2\mathrm{d}x.\quad(5.2.13)\end{aligned}$$

记 $w_i=(t_iv_i-\theta_b)/\|u_i\|_\infty$, 那么 $w_i|_{\partial\Omega}=0$. 注意到 $0\leqslant t_i\leqslant 1$, $v_i\geqslant\theta_b$, 直接计算有

$$\begin{aligned}-\Delta w_i&=bw_i+\frac{m_i\theta_b^2-m_it_iv_i^2}{\|u_i\|_\infty(m_i+t_iu_i)}+\frac{t_i\tilde{u}_i\theta_b^2}{m_i+t_iu_i}\\&\leqslant bw_i+\frac{m_i\theta_b^2-m_it_i^2v_i^2}{\|u_i\|_\infty(m_i+t_iu_i)}+\frac{t_i\tilde{u}_i\theta_b^2}{m_i+t_iu_i}\\&=bw_i-\frac{m_i(\theta_b+t_iv_i)}{m_i+t_iu_i}w_i+\frac{t_i\tilde{u}_i\theta_b^2}{m_i+t_iu_i}\\&\leqslant bw_i-\frac{m_i(1+t_i)\theta_b}{m_i+t_iu_i}w_i+\frac{t_i\tilde{u}_i\theta_b^2}{m_i+t_iu_i},\quad x\in\Omega.\end{aligned}$$

由于 $m_i\longrightarrow\infty$, $t_i\longrightarrow 1$, $u_i\longrightarrow 0$, 所以

$$b-\frac{m_i(1+t_i)\theta_b}{m_i+t_iu_i}\longrightarrow b-2\theta_b,\quad \frac{t_i\tilde{u}_i\theta_b^2}{m_i+t_iu_i}\longrightarrow 0.$$

于是当 i 适当大时,

$$-\Delta w_i\leqslant\big[b-2\theta_b+o(1)\big]w_i+o(1),\quad x\in\Omega.$$

因为 $w_i|_{\partial\Omega}=0$, 算子 $-\Delta+2\theta_b-b$ 可逆, 故 w_i 有一致上界. 注意到 $m_i\longrightarrow\infty$, $h_i\longrightarrow 1$, $\tilde{u}_i\longrightarrow\theta_b/\|\theta_b\|_\infty$, 利用不等式 (5.2.13) 便可推知当 i 充分大时, 有 $a_i<b$. 这是一个矛盾. 引理得证.

引理 5.2.4 对任给的 $b>\lambda_1$ 和适当小的正常数 σ, 存在正常数 $M=M(\sigma)$, 当 $m\geqslant M$ 和 $a\geqslant b$ 时, 问题 (5.2.5) 的共存解 (u,v) 满足 $u\geqslant\theta_{a-\sigma}$.

证明 首先, 同于引理 5.2.3 的证明过程中的情形 1 可证: 当 m 适当大时, 对任给的 $a\geqslant b$, 问题 (5.2.5) 的共存解 (u,v) 满足 $u\geqslant\theta_{a(1-\sigma)}$. 因为 $v<(m+at)\theta_b/m$, 故有

$$-\Delta u\geqslant u\left(a-\frac{t(m+at)\theta_b}{m\big[1+m\theta_{a(1-\sigma)}\big]}-u\right).$$

为了证明我们的结论, 只需验证

$$a - \frac{t(m+at)\theta_b}{m\left[1+m\theta_{a(1-\sigma)}\right]} \geqslant a-\sigma.$$

为使上面的不等式成立, 只需

$$a\theta_b \leqslant \frac{1}{2}\sigma m^2\theta_{a(1-\sigma)}, \quad \theta_b \leqslant \frac{1}{2}m\sigma\theta_{a(1-\sigma)}. \tag{5.2.14}$$

由于 $\theta_{a(1-\sigma)} \geqslant \theta_{b(1-\sigma)}; \theta_{b(1-\sigma)}\big|_\Omega > 0$, $\left.\dfrac{\partial\theta_{b(1-\sigma)}}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} < 0$, 故当 m 适当大时, 式 (5.2.14) 的第二个不等式成立.

由定理 3.5.1 的结论 (1) 知, θ_a/a 关于 a 是严格递增的, 故存在正常数 C_0, 使得 $\theta_b \leqslant C_0\dfrac{\theta_{a(1-\sigma)}}{a}$ 对于所有 $a \geqslant b$ 成立. 故当 m 适当大时, 式 (5.2.14) 的第一个不等式成立. 引理证毕.

当 a 和 m 都很大时, 为了获得共存解的唯一性和稳定性, 我们还需要下面的引理.

引理 5.2.5 *存在适当大的正常数 A 和 M, 当 $a \geqslant A$ 及 $m \geqslant M$ 时问题 (5.2.1) 的共存解是线性稳定的.*

为了证明上面的引理, 需要运用引理 5.2.4 以及下面的引理.

引理 5.2.6 *对任意给定的两个序列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, 若 $a_i, m_i \longrightarrow \infty$, 则问题 (5.2.1) 对应于 $(a,m)=(a_i,m_i)$ 的共存解 (u_i,v_i) 具有下面的性质:*

(1) 在 $\bar{\Omega}$ 上, $m_iv_i/(m_i+u_i)$ 一致有界;

(2) 在 Ω 的任意紧子集上, $m_iv_i/(m_i+u_i)$ 一致收敛到 θ_b.

证明 (1) 根据定理 5.2.1 以及引理 5.2.4, 对任意给定的适当小的正常数 σ 和所有适当大的 i, 有

$$\frac{m_iv_i}{m_i+u_i} \leqslant \frac{(m_i+a_i)\theta_b}{m_i+u_i} \leqslant \frac{(m_i+a_i)\theta_b}{m_i+\theta_{a_i-\sigma}}. \tag{5.2.15}$$

由定理 3.5.1 的结论 (1), 存在常数 $C_1>0$, 使得 $a_i\theta_b \leqslant C_1\theta_{a_i-\sigma}$ 对所有适当大的 i 成立. 从而存在常数 $C_2>0$, 使得

$$\frac{(m_i+a_i)\theta_b}{m_i+\theta_{a_i-\sigma}} \leqslant C_2, \quad \forall\, x\in\bar{\Omega}, \ i \gg 1.$$

再结合不等式 (5.2.15) 知, $m_iv_i/(m_i+u_i)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致有界.

(2) 取 $\delta>0$ 适当小, Ω^* 是 Ω 的任意紧子集. 结合估计式 (5.2.15) 以及定理 3.5.1 的结论 (5), 对所有适当大的 i,

$$\frac{m_iv_i}{m_i+u_i} \leqslant (1+\delta)\theta_b \tag{5.2.16}$$

在 Ω^* 上一致成立.

对于 $0<\varepsilon\ll 1$, 记 $\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega: d(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$. 利用引理 5.2.4 和定理 3.5.1 的结论 (5) 推知, 对于充分小的 δ 和充分大的 i, v_i 是下述问题

$$\begin{cases}-\Delta w=w\left(b-\dfrac{m_iw}{m_i+(1-\delta)(a_i-\delta)}\right), & x\in\Omega_\varepsilon,\\ w=0, & x\in\partial\Omega_\varepsilon\end{cases}$$

的一个上解. 因此 $v_i\geqslant[m_i+(1-\delta)(a_i-\delta)]\theta_{b,\varepsilon}/m_i$, 其中 $\theta_{b,\varepsilon}$ 是问题 (3.5.1) 当 $a=b$ 和 $\Omega=\Omega_\varepsilon$ 时的唯一正解. 另一方面, 由于当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时 $\Omega_\varepsilon\longrightarrow\Omega$, 故当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时 $\theta_{b,\varepsilon}\longrightarrow\theta_b$ 在 Ω^* 上一致成立. 于是

$$v_i\geqslant[m_i+(1-\delta)(a_i-\delta)](1-\delta)\theta_b/m_i$$

在 Ω^* 上一致成立, 进而推出 (如有必要, 选取更小的 δ)

$$\frac{m_iv_i}{m_i+u_i}\geqslant\frac{[m_i+(1-\delta)(a_i-\delta)](1-\delta)\theta_b}{m_i+a_i}\geqslant(1-\delta)^3\theta_b \tag{5.2.17}$$

在 Ω^* 上一致成立. 由 $\delta>0$ 的任意性以及估计式 (5.2.16) 和 (5.2.17) 知, 第二个结论成立. 证毕.

引理 5.2.5 的证明　假设结论不成立, 则存在 a_i, $m_i\longrightarrow\infty$, 复数 μ_i 和光滑函数 (ξ_i,η_i), 满足: μ_i 的实部 $\mathrm{Re}\,\mu_i\leqslant 0$, $\|\xi_i\|_2^2+\|\eta_i\|_2^2=1$, 以及

$$\begin{cases}-\Delta\xi_i-(a_i-2u_i-f_i)\,\xi_i+g_i\eta_i=\mu_i\xi_i, & x\in\Omega,\\ -\Delta\eta_i-(b-f_i^*)\,\eta_i-g_i^*\xi_i=\mu_i\eta_i, & x\in\Omega,\\ \xi_i=\eta_i=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{5.2.18}$$

其中 (u_i,v_i) 是问题 (5.2.1) 当 $(a,m)=(a_i,m_i)$ 时的共存解,

$$f_i=\frac{v_i}{(1+m_iu_i)^2},\quad g_i=\frac{u_i}{1+m_iu_i},\quad f_i^*=\frac{2m_iv_i}{m_i+u_i},\quad g_i^*=\frac{m_iv_i^2}{(m_i+u_i)^2}.$$

同于定理 5.1.6 的证明, 我们有

$$\begin{aligned}\mu_i=&\int_\Omega(|\nabla\xi_i|^2+|\nabla\eta_i|^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega(a_i-2u_i-f_i)\,|\xi_i|^2\mathrm{d}x\\&+\int_\Omega g_i\bar{\xi}_i\eta_i-\int_\Omega(b-f_i^*)\,|\eta_i|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega g_i^*\xi_i\bar{\eta}_i\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

根据引理 5.2.6, $m_iv_i/(m_i+u_i)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致有界. 又因为 $m_i\longrightarrow\infty$, 所以

$$\lim_{i\to\infty}g_i=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{m_i}\frac{m_iu_i}{1+m_iu_i}=0,$$

$$\lim_{i\to\infty}g_i^*=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{m_i}\left(\frac{m_iv_i}{m_i+u_i}\right)^2=0.$$

由式 (5.2.19) 推知 $\operatorname{Im}\mu_i \longrightarrow 0$. 为了书写方便, 分别用 ξ_i^R, η_i^R, μ_i^R, 和 ξ_i^I, η_i^I, μ_i^I 表示 ξ_i, η_i, μ_i 的实部和虚部. 先在问题 (5.2.18) 中 ξ_i 的方程两边取实部, 而后两边乘以 ξ_i^R, 再在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla\xi_i^R|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(a_i - 2u_i - \frac{v_i}{(1+m_iu_i)^2}\right)|\xi_i^R|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{u_i}{1+m_iu_i}\xi_i^R\eta_i^R\mathrm{d}x\\ =&\mu_i^R\int_\Omega |\xi_i^R|^2\mathrm{d}x - \mu_i^I\int_\Omega \xi_i^I\xi_i^R\mathrm{d}x \leqslant -\mu_i^I\int_\Omega \xi_i^I\xi_i^R\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $u_i/(1+m_iu_i)\longrightarrow 0$, $\mu_i^I\longrightarrow 0$, $\mu_i^R\leqslant 0$, 并且 ξ_i, η_i 在 $L^2(\Omega)$ 中有界, 从上面的不等式可以推出存在正常数 C, 当 i 适当大时有

$$\int_\Omega |\nabla\xi_i^R|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(a_i - 2u_i - \frac{v_i}{(1+m_iu_i)^2}\right)|\xi_i^R|^2\mathrm{d}x \leqslant C.$$

同理可得

$$\int_\Omega |\nabla\xi_i^I|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(a_i - 2u_i - \frac{v_i}{(1+m_iu_i)^2}\right)|\xi_i^I|^2\mathrm{d}x \leqslant C, \quad i\gg 1.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla\xi_i|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega (2u_i - a_i)\,|\xi_i|^2\mathrm{d}x\\ \leqslant&\int_\Omega |\nabla\xi_i|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(a_i - 2u_i - \frac{v_i}{(1+m_iu_i)^2}\right)|\xi_i|^2\mathrm{d}x \leqslant C, \quad i\gg 1.\end{aligned}$$

根据特征值的变分刻画, 我们有

$$\lambda_1(2u_i - a_i)\int_\Omega |\xi_i|^2\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla\xi_i|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega (2u_i - a_i)\,|\xi_i|^2\mathrm{d}x \leqslant C.$$

利用引理 5.2.4, 对于适当小的 $\sigma>0$, 当 i 适当大时有 $u_i\geqslant\theta_{a_i-\sigma}$. 这样从上式又推出

$$\lambda_1(2\theta_{a_i-\sigma} - a_i)\int_\Omega |\xi_i|^2\mathrm{d}x \leqslant \lambda_1(2u_i - a_i)\int_\Omega |\xi_i|^2\mathrm{d}x \leqslant C. \tag{5.2.20}$$

由定理 3.5.2 中的不等式 (3.5.7) 又得 (注意, 那里的 $k_0>1$), 当 $i\longrightarrow\infty$ 时有

$$\lambda_1(2\theta_{a_i-\sigma} - a_i) = \lambda_1(2\theta_{a_i-\sigma}) - a_i \geqslant k_0(a_i-\sigma) - a_i \longrightarrow \infty. \tag{5.2.21}$$

从式 (5.2.20) 和式 (5.2.21) 容易看出 $\|\xi_i\|_2\longrightarrow 0$, 从而 $\|\eta_i\|_2\longrightarrow 1$.

用 $\bar\eta_i$ 乘以 η_i 的方程, 再积分得

$$\int_\Omega |\nabla\eta_i|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(b - \frac{2m_iv_i}{m_i+u_i}\right)|\eta_i|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{m_iv_i^2}{(m_i+u_i)^2}\xi_i\bar\eta_i\mathrm{d}x = \mu_i\int_\Omega |\eta_i|^2\mathrm{d}x.$$

两边取实部又得

$$
\begin{aligned}
\mu_i^R\int_\Omega|\eta_i|^2\mathrm{d}x=&\int_\Omega|\nabla\eta_i|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(b-\frac{2m_iv_i}{m_i+u_i}\right)|\eta_i|^2\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega\frac{m_iv_i^2}{(m_i+u_i)^2}\left(\xi_i\bar{\eta}_i\right)^R\mathrm{d}x\\
\geqslant&-\int_\Omega\left(b-\frac{2m_iv_i}{m_i+u_i}\right)|\eta_i|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{m_iv_i^2}{(m_i+u_i)^2}\left(\xi_i\bar{\eta}_i\right)^R\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{5.2.22}
$$

因为 ξ_i, η_i 在 $L^2(\Omega)$ 中有界, $\|\eta_i\|_2\longrightarrow 1$, $2m_iv_i/(m_i+u_i)$ 一致有界, 并且 $m_iv_i^2/(m_i+u_i)^2\longrightarrow 0$, 由上式推知, 存在正常数 C 和 i_0, 使得

$$\mu_i^R\geqslant -C,\quad \forall\, i\geqslant i_0.$$

前面已经推出 $\mu_i^I\longrightarrow 0$, 因而 μ_i 有界. 注意到 $m_iv_i^2/(m_i+u_i)^2\longrightarrow 0$, 利用式 (5.2.22) 我们有

$$\int_\Omega|\nabla\eta_i|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(b-\frac{2m_iv_i}{m_i+u_i}\right)|\eta_i|^2\mathrm{d}x\leqslant C,\quad i\gg 1.$$

由此不难推出 $\|\nabla\eta_i\|_2$ 有界. 故可假设 $\mu_i\longrightarrow\mu$, $\mathrm{Re}\,\mu\leqslant 0$, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\eta_i\rightharpoonup\eta$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $\eta_i\longrightarrow\eta$. 由于 $\|\xi_i\|_2^2+\|\eta_i\|_2^2=1$, 并且 $\|\xi_i\|_2\longrightarrow 0$, 所以 $\|\eta\|_2=1$. 利用引理 5.2.6 的结论 (2) 以及 $m_iv_i^2/(m_i+u_i)^2\longrightarrow 0$, 从问题 (5.2.18) 的第二个和第三个方程便可推知, η 是问题

$$\begin{cases}-\Delta\eta+(2\theta_b-b)\eta=\mu\eta, & x\in\Omega,\\ \eta=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的非负非平凡弱解. 根据椭圆型方程的正则性理论和强极值原理又知, η 是上述问题的正古典解. 因此 μ 是实数并且 $\mu\geqslant\lambda_1(2\theta_b-b)=\lambda_1(\theta_b-b)=0$. 得到一个矛盾, 引理得证.

5.2.3　共存解的多解性、精确个数与稳定性

有了上一小节的准备工作, 现在我们讨论当 m 适当大时, 共存解的多解性、精确个数与稳定性, 其主要结果是下面的定理.

定理 5.2.4

(1) *对于任给的 $0<\varepsilon\ll 1$, 总存在正常数 $M=M(\varepsilon)$, 当 $m\geqslant M$, $a\in(\lambda_1+\varepsilon,b)$ 时, 问题 (5.2.1) 至少有两个共存解.*

(2) *存在正常数 M, 当 $m\geqslant M$, $a\in[b,\infty)$ 时, 问题 (5.2.1) 有唯一的共存解并且还是线性稳定的.*

证明 (1) 用反证法. 当 $a \geqslant \lambda_1+\varepsilon$, 而 m 适当大时, 引理 5.2.2 给出了共存解的存在性. 如果存在 $m_i \longrightarrow \infty$ 和 $a_i \in (\lambda_1+\varepsilon,\, b)$, 当 $(a,m)=(a_i,m_i)$ 时问题 (5.2.1) 只有一个共存解, 记为 $(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$, 那么由引理 5.2.2 知 $(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$ 满足

$$\theta_{a-\varepsilon/2} \leqslant \tilde{u}_i \leqslant \theta_a, \quad \theta_b \leqslant \tilde{v}_i \leqslant \theta_{b+\varepsilon/2}.$$

不妨认为 $a_i \longrightarrow a \in [\lambda_1+\varepsilon, b]$. 因为当 $m \longrightarrow \infty$ 时, 在区域

$$\left\{(u,v): \theta_{a-\varepsilon/2} \leqslant u \leqslant \theta_a,\ \theta_b \leqslant v \leqslant \theta_{b+\varepsilon/2}\right\}$$

内问题 (5.2.1) 的极限是

$$\begin{cases} -\Delta u = u(a-u), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v(b-v), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.23}$$

而问题 (5.2.23) 有唯一的正解并且还是线性稳定的, 利用正则扰动理论 ([23]) 知, 当 $a_i \in (\lambda_1+\varepsilon, b), m_i$ 适当大时, $(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$ 是线性稳定的. 同于定理 5.1.7 的证明, $\mathrm{index}_W(F, (\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)) = 1$. 根据度的可加性, 由引理 5.2.1 得

$$\begin{aligned} 1 &= \deg_W(I-F, D) \\ &= \mathrm{index}_W(F,(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)) + \mathrm{index}_W(F,(0,0)) \\ &\quad + \mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0)) + \mathrm{index}_W(F,(0,\theta_b)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

该矛盾说明结论 (1) 成立.

下面证明结论 (2). 由引理 5.2.2 知, 问题 (5.2.1) 至少有一个共存解. 取常数 A 由引理 5.2.5 给出.

我们首先考虑 $a \in [b, A]$ 的情形. 利用引理 5.2.3, 同上可证当 $a \in [b, A]$ 并且 m 充分大时, 问题 (5.2.1) 的任意共存解都是线性稳定的.

记

$$D_0 = \{(u,v) \in E: \theta_{(b+\lambda_1)/2}/2 < u < 2a,\ \theta_b/2 < v < 2b\},$$

则存在充分大的 C, 使得对所有的 $t \in [0,1]$, 算子 F_t 映射 $\bar{D}_0$ 到 W (其中常数 C 和算子 F_t 由 5.2.1 节给出). 显然, (u,v) 是问题 (5.2.5) 在 D_0 内的解当且仅当它是 F_t 在 D_0 内的一个不动点. 根据度的同伦不变性, 有

$$\deg_W(I-F, D_0) = \deg_W(I-F_0, D_0) = \mathrm{index}_W(F_0, (\theta_a,\theta_b)) = 1.$$

另一方面, 利用引理 5.2.3 知, 当 m 充分大时算子 F 的不动点都属于 D_0. 上面已经说明这些不动点必是线性稳定的, 再利用紧性方法可知这些不动点的个数必是有限的, 记它们为 $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^k$. 同于定理 5.1.7 的证明, 对每个 i 有 $\operatorname{index}_W(F, (u_i, v_i)) = 1$, 于是

$$1 = \deg_W(I - F, D_0) = \sum_{i=1}^k \operatorname{index}_W(F, (u_i, v_i)) = k.$$

因而当 $a \in [b, A]$ 并且 m 充分大时, 问题 (5.2.1) 有唯一的共存解.

其次考虑 $a \in [A, \infty)$ 的情形. 根据引理 5.2.5, 当 M 充分大时问题 (5.2.1) 的共存解都是线性稳定的. 同上可证这些共存解的个数有限, 记为 $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^k$, 且对每个 i 都有 $\operatorname{index}_W(F, (u_i, v_i)) = 1$. 由度的可加性以及引理 5.2.1 可知,

$$\begin{aligned}
1 &= \deg_W(I - F, D) \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{index}_W(F, (u_i, v_i)) + \operatorname{index}_W(F, (\theta_a, 0)) \\
&\quad + \operatorname{index}_W(F, (0, \theta_b)) + \operatorname{index}_W(F, (0, 0)) \\
&= k.
\end{aligned}$$

由此即得共存解的唯一性. 定理得证.

采用文献 [24] 的方法, 我们还可以证明下面的结果:

定理 5.2.5　*固定 $b > \lambda_1$, 则存在充分大的正常数 $M = M(b)$, 当 $m \geqslant M$ 时, 存在唯一的常数 $\tilde{a} = \tilde{a}(m) \in (\lambda_1, b)$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty} \tilde{a}(m) = \lambda_1$, 并且下面的结论成立:*

(1) 问题 (5.2.1) 有共存解当且仅当 $a \geqslant \tilde{a}$;

(2) 若 $a = \tilde{a}$ 或者 $a \in (b, \infty)$, 那么问题 (5.2.1) 有唯一的共存解. 特别地, 当 $a \in (b, \infty)$ 时, 该共存解还是线性稳定的;

(3) 若 $a \in (\tilde{a}, b)$, 那么问题 (5.2.1) 至少有两个共存解. 特别地, 当 $b < \lambda_2$ 时, 问题 (5.2.1) 恰好有两个共存解, 一个是线性稳定, 另一个不是线性稳定. 这里的 λ_2 是在 Ω 上算子 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第二特征值.

由于该定理的证明非常复杂, 已经不适合作为讲课内容, 故略去. 有兴趣的读者可以参看文献 [24, 25].

习　题　5

5.1　证明引理 5.1.2.

5.2　完成定理 5.1.9 的证明.

5.3　证明定理 5.1.10 的结论 (2).

5.4 利用锥上的拓扑度理论研究捕食模型的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u(a-u-bv), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v(c-v+ku), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

共存解的存在性, 并与习题 3.8 作比较, 分析上下解方法和拓扑度方法的优劣性. 这里的 a, b, c 和 k 都是正常数.

5.5 证明定理 5.2.1 的第二个结论, 即证明当 $a > \lambda_1\big((m+a)\theta_b/m\big)$ 时, 有 $u > u_m^*$, 其中 u_m^* 是问题 (5.2.2) 的唯一正解.

5.6 证明定理 5.2.2.

5.7 证明定理 5.2.3.

5.8 具体验证不等式 (5.2.7).

第6章　方程组的齐次 Neumann 边值问题

模式 (pattern), 又称为斑图, 是在空间或时间上具有某种规律性的非均匀宏观结构, 它普遍存在于自然界中. 形形色色的模式结构, 构成了多姿多彩、千媚百态的世界. 因而了解模式形成的原因及机制, 对于揭开自然界形成之谜具有重大意义.

1952 年图灵 (A. Turing) 在他的著名论文“形态形成的化学基”[26] 一文中, 用一个反应扩散模型成功地说明了某些生物体表面所显示的图纹 (如斑马身上的斑图) 是怎样产生的.

在图灵提出的反应扩散体系 (方程组) 中, 由体系内在的反应扩散特性所引起的空间均匀态失稳, 导致了对称性破缺 (空间平移对称破缺), 从而使体系自组织出一些空间定态图纹. 这个过程及其所形成的图纹分别被后人称为图灵失稳 (图灵分岔) 和图灵模式. 图灵模式产生的“原因”, 是一个非线性反应动力学过程 (如自催化、自禁阻过程) 与一种特殊的扩散过程的耦合. 这个特殊的扩散过程, 要求系统中活化子的扩散速度远小于禁阻子的扩散速度, 也就是说活化子的扩散系数远小于禁阻子的扩散系数.

现在用数学语言来解释本章将要介绍的一种图灵模式 —— 由扩散导致的非均匀平衡态 (非常数正平衡解). 考虑带有齐次 Neumann 边界条件的反应扩散方程组

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = f(u,v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - d_2\Delta v = g(u,v), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

其中 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 表示两种物质的分布密度 (浓度), d_1 和 d_2 是扩散系数, $f(u,v)$ 和 $g(u,v)$ 是描述两种物质关系的反应函数. 当两个扩散系数之比很大时, 正常数平衡解的稳定性会发生改变, 由稳定 (对相应的常微分方程组而言) 变为不稳定 (对于反应扩散方程组而言), 并且反应扩散方程组有非均匀平衡态 (非常数正平衡解). 这一性质与描述单个物质的反应扩散方程的性质大相径庭. 这种非均匀平衡态是一种特殊的图灵模式, 也称为扩散导致的模式.

本章结合两个具有代表性的例子, 利用抽象的拓扑度理论和先验估计, 介绍扩散导致的模式的研究方法. 通过这两个例子, 读者还可以学习和掌握一些处理非线性偏微分方程的方法和技巧.

6.1 常数解处的指数计算

利用拓扑度方法或分支理论研究椭圆型方程 (组) 解的存在性, 其中最重要的一步是计算指数 (不动点指数、零点指数). 本节给出椭圆型方程组的齐次 Neumann 边值问题在孤立正常数解处的不动点指数的计算框架, 把复杂的特征值的计算转化为判断一个简单的多项式的符号.

取 m 是正整数, 设 $\Phi, G: \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 分别是二次和一次连续可微函数, 并且对所有 $u \in \mathbb{R}_+^m$, 矩阵 $\Phi_u(u)$ 的行列式大于零 (由此知逆矩阵 $\Phi_u^{-1}(u)$ 存在). 考虑强耦合方程组的齐次 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta \Phi(u) = G(u), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 利用拓扑度理论研究问题 (6.1.1) 的非常数正解的存在性, 需要计算与问题 (6.1.1) 对应的算子方程在正常数解处的指数 (不动点指数或零点指数). 计算这种指数的关键是研究问题 (6.1.1) 在该正常数解处的线性化问题的特征值.

定义

$$X = \left\{ u \in [C^1(\bar{\Omega})]^m : \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ i = 1, \cdots, m \right\},$$
$$X^+ = \{ u \in X : u_i(x) > 0,\ x \in \bar{\Omega},\ i = 1, \cdots, m \},$$
$$B(C) = \{ u \in X : C^{-1} < u_i(x) < C,\ x \in \bar{\Omega},\ i = 1, \cdots, m \}, \quad C > 0.$$

因为对所有非负的 u, 矩阵 $\Phi_u(u)$ 的行列式是正的, 所以 $\Phi_u(u)$ 的逆矩阵 $\Phi_u^{-1}(u)$ 存在并且其行列式也是正的. 因此, 正函数 u 是问题 (6.1.1) 的解当且仅当 u 是算子方程

$$\mathcal{F}(u) := u - (I - \Delta)^{-1} \{ \Phi_u^{-1}(u)[G(u) + \nabla u\, \Phi_{uu}(u) \nabla u^{\mathrm{T}}] + u \} = 0$$

的解, 其中 $(I - \Delta)^{-1}$ 是 $I - \Delta$ 在 X 上的逆算子,

$$\nabla u\, \Phi_{uu}(u) \nabla u^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u_i \partial u_j} \nabla u_i \cdot \nabla u_j, \cdots, \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial u_i \partial u_j} \nabla u_i \cdot \nabla u_j \right).$$

由于 $\mathcal{F}(\cdot)$ 是恒同算子的一个紧摄动, 所以对任意的 $B = B(C)$, 只要在 ∂B 上 $\mathcal{F}(u) \neq 0$, Leray-Schauder 度 $\deg(\mathcal{F}(\cdot), B, 0)$ 就有定义.

假设 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_m) > 0$ (即 $\tilde{u}_i > 0$ 对所有的 $1 \leqslant i \leqslant m$) 是代数方程组 $G(u) = 0$ 的孤立解, 那么 $\tilde{u}$ 是问题 (6.1.1) 的正常数解, 从而是 $\mathcal{F}(u)$ 的正常数零点, 也是算子 $I - \mathcal{F}$ 的正常数不动点. 直接计算知

$$\mathcal{F}_u(\tilde{u}) = I - (I - \Delta)^{-1}\left[\Phi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u}) + I\right].$$

如果 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 可逆, 即 0 不是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的特征值, 那么 $I - \mathcal{F}$ 在点 $\tilde{u}$ 处的不动点指数存在并且

$$\text{index}(I - \mathcal{F}(\cdot), \tilde{u}) = (-1)^{\gamma},$$

其中 γ 是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的所有负特征值的代数重数之和 (定理 4.4.1).

除非特别说明, 本章总假设 $0 = \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_i < \cdots$ 是算子 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Neumann 边界条件的全部特征值, $E(\mu_i)$ 是由 μ_i 对应的特征函数张成的子空间.

记 m_i 是 μ_i 的重数, 即 $m_i = \dim E(\mu_i)$. 又设 $\{\phi_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$ 是 $E(\mu_i)$ 的基, 即 $\{\phi_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$ 是与 μ_i 对应的线性无关的特征函数的全体. 定义

$$X_{ij} = \{\boldsymbol{c}\phi_{ij} : \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m\}, \quad X_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} X_{ij}.$$

第一步 证明 X_{ij} 是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的不变子空间, 从而 X_i 是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的不变子空间.

为了书写方便, 我们证明 $X_{\alpha\beta}$ 是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的不变子空间. 记 $B = \Phi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u}) + I$. 设 $\phi = \boldsymbol{c}\phi_{\alpha\beta} \in X_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}_u(\tilde{u})\phi = \psi$, 则有

$$\left[I - (I - \Delta)^{-1}B\right]\boldsymbol{c}\phi_{\alpha\beta} = \psi,$$

即

$$(I - \Delta)\boldsymbol{c}\phi_{\alpha\beta} - B\boldsymbol{c}\phi_{\alpha\beta} = (I - \Delta)\psi,$$
$$\boldsymbol{c}\phi_{\alpha\beta} + \mu_\alpha\boldsymbol{c}\phi_{\alpha\beta} - B\boldsymbol{c}\phi_{\alpha\beta} = (I - \Delta)\psi.$$

对于任意的 $\phi_{ij} \perp \phi_{\alpha\beta}$, 用 ϕ_{ij} 乘以上式中的第 k 个方程并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}0 = b_k\int_\Omega \phi_{ij}\phi_{\alpha\beta}\mathrm{d}x &= \int_\Omega (\psi_k - \Delta\psi_k)\phi_{ij}\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \phi_{ij}\psi_k\mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta\phi_{ij}\psi_k\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \phi_{ij}\psi_k\mathrm{d}x + \mu_i\int_\Omega \phi_{ij}\psi_k\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 b_k 是 $\boldsymbol{c} + \mu_\alpha\boldsymbol{c} - B\boldsymbol{c}$ 的第 k 个分量, ψ_k 是 ψ 的第 k 个分量. 注意到 $\mu_i \geqslant 0$, 由上式得

$$\int_\Omega \phi_{ij}\psi_k \mathrm{d}x = 0,$$

故 $\psi_k \perp \phi_{ij}$. 因为 $L^2(\Omega)$ 中的任一元素都可以分解成 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m_i} c_{ij}\phi_{ij}$ 的形式, 所以 $\psi_k = c_k\,\phi_{\alpha\beta}$, 即 $\psi \in X_{\alpha\beta}$. 这说明 $X_{\alpha\beta}$ 是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的不变子空间.

第二步 建立算子 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的特征值与一列矩阵的特征值之间的关系.

记矩阵

$$M_i \equiv \frac{1}{1+\mu_i}[\mu_i I - \varPhi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u})].$$

对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$, 注意到 (习题 6.1)

$$(I-\Delta)^{-1}\phi_{ij} = \frac{1}{1+\mu_i}\phi_{ij}, \tag{6.1.2}$$

直接计算得

$$\begin{aligned}\big(\lambda I - \mathcal{F}_u(\tilde{u})\big)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij} &= (\lambda-1)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij} + (I-\Delta)^{-1}\big[\varPhi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u})+I\big]\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}\\ &= (\lambda-1)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij} + \big[\varPhi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u})+I\big]\boldsymbol{c}(I-\Delta)^{-1}\phi_{ij}\\ &= (\lambda-1)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij} + \big[\varPhi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u})+I\big]\boldsymbol{c}\frac{1}{1+\mu_i}\phi_{ij}\\ &= \left(\lambda I - I + \big[\varPhi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u})+I\big]\frac{1}{1+\mu_i}\right)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}\\ &= (\lambda I - M_i)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}.\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

假设 λ 是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的一个特征值, $\phi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij}$ 是对应的特征函数, 则有

$$\mathcal{F}_u(\tilde{u})\phi = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\mathcal{F}_u(\tilde{u})\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij} = \lambda\phi = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda\,\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij}.$$

因为 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij} \in X_{ij}$, 所以

$$\mathcal{F}_u(\tilde{u})\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij} = \lambda\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij}, \quad \text{即} \quad (\lambda I - \mathcal{F}_u(\tilde{u}))\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij} = 0.$$

此式结合式 (6.1.3) 得

$$(\lambda I - M_i)\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij} = 0.$$

如果 $\boldsymbol{c}_{ij} \neq 0$, 那么 λ 是 M_i 的一个特征值, 对应的特征向量是 $\boldsymbol{c}_{ij}$. 由于至少存在某个 $\boldsymbol{c}_{ij} \neq 0$, 故 λ 一定是某个矩阵 M_i 的特征值.

由式 (6.1.3) 又知, 如果 λ 是矩阵 M_i 的一个特征值, 对应的特征向量是 $\boldsymbol{c}$, 那么 λ 也是算子 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 在空间 X_i 上的一个特征值, 对应的特征函数是 $\boldsymbol{c}\phi_{ij}$, $j=1,\cdots,m_i$.

上面的讨论也说明, $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 是可逆的当且仅当所有的矩阵 M_i 是可逆的.

第三步 对于固定的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和 ϕ_{ij}, 证明对任意的 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^m$ 和任意的正整数 l, 有

$$\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^l\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}=0\ \text{当且仅当}\ (\lambda I-M_i)^l\boldsymbol{c}=0. \tag{6.1.4}$$

关于 l 用归纳法来证明. 由式 (6.1.3) 知, 当 $l=1$ 时结论成立. 假设 $l=k$ 时结论对于任意的 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^m$ 成立. 对于 $l=k+1$, 利用式 (6.1.3) 直接计算得

$$\begin{aligned}\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^{k+1}\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}&=\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^k\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}\\&=\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^k(\lambda I-M_i)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}.\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

如果 $\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^{k+1}\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}=0$, 根据式 (6.1.5), 我们有

$$\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^k(\lambda I-M_i)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}=0.$$

由归纳假设知

$$(\lambda I-M_i)^{k+1}\boldsymbol{c}=(\lambda I-M_i)^k(\lambda I-M_i)\boldsymbol{c}=0.$$

如果 $(\lambda I-M_i)^{k+1}\boldsymbol{c}=0$, 即 $(\lambda I-M_i)^k(\lambda I-M_i)\boldsymbol{c}=0$, 由归纳假设知

$$\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^k(\lambda I-M_i)\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}=0.$$

再利用式 (6.1.5) 得 $\big[\lambda I-\mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^{k+1}\boldsymbol{c}\,\phi_{ij}=0$.

第四步 算子 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的负特征值生成的特征子空间的转化.

为了计算 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的负特征值的重数, 我们把 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的负特征值生成的特征子空间进行转化.

由于 $\lim\limits_{i\to\infty}M_i=I$, 故存在 i_0, 当 $i>i_0$ 时, M_i 的所有特征值的实部不小于 $1/2$. 所以当 $i>i_0$ 时, 任意负数 λ 都不是 M_i 的特征值.

定义

$$\Lambda=\{\lambda:\lambda\ \text{是}\ \mathcal{F}_u(\tilde{u})\ \text{的负特征值}\}.$$

如果 $\lambda\in\Lambda$, 那么

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-M_i)^l=\{0\},\quad \forall\, i>i_0. \tag{6.1.6}$$

同时由第二步的讨论知

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\lambda : \lambda \text{ 是 } M_i \text{ 的负特征值}\} = \bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda : \lambda \text{ 是 } M_i \text{ 的负特征值}\}.$$

记

$$E^{\lambda} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathscr{N}\big(\lambda I - \mathcal{F}_u(\tilde{u})\big)^l,$$

即 λ 对应的特征子空间. 对于任意 $\phi \in X$, 把它唯一地表示成

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \boldsymbol{c}_{ij} \phi_{ij},$$

其中 $\boldsymbol{c}_{ij} \in \mathbb{R}^m$, ϕ_{ij} 同上. 因为空间 X_{ij} 是 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的不变子空间, 所以对任意的 $l \geqslant 1$, 它也是算子 $\big[\lambda I - \mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^l$ 的不变子空间. 因此,

$$\phi \in \mathscr{N}\big[\lambda I - \mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^l$$

当且仅当

$$\big[\lambda I - \mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^l \boldsymbol{c}_{ij} \phi_{ij} = 0, \quad \forall\, i \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m_i.$$

由式 (6.1.4) 知, 上式等价于

$$\big(\lambda I - M_i\big)^l \boldsymbol{c}_{ij} = 0, \quad \forall\, i \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m_i. \tag{6.1.7}$$

特别地, 当 $\lambda \in \Lambda$, $\phi \in E^{\lambda}$ 时, 由式 (6.1.6) 得

$$\boldsymbol{c}_{ij} = 0, \quad \forall\, i > i_0,\ 1 \leqslant j \leqslant m_i.$$

于是

$$\phi = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{m_i} \boldsymbol{c}_{ij} \phi_{ij}, \quad \forall\, \phi \in E^{\lambda},\ \lambda \in \Lambda. \tag{6.1.8}$$

再定义

$$U^{\lambda} = \left\{ \phi = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{m_i} \boldsymbol{c}_{ij} \phi_{ij} : \boldsymbol{c}_{ij} \in \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathscr{N}(\lambda I - M_i)^l \right\},$$

那么

$$E^{\lambda} = U^{\lambda}, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

事实上, 注意到 X_{ij} 是算子 $\big[\lambda I - \mathcal{F}_u(\tilde{u})\big]^l$ 的不变子空间, 以及式 (6.1.4) 和式 (6.1.8), 同于上面的推导易知

$$\phi=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij}\in E^{\lambda}\Longleftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{c}_{ij}\in\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-M_i)^l, & 1\leqslant i\leqslant i_0,\ 1\leqslant j\leqslant m_i,\\ \boldsymbol{c}_{ij}=0, & i>i_0,\ 1\leqslant j\leqslant m_i\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\phi\in U^{\lambda}.$$

第五步 计算 $\mathcal{F}_u(\tilde{u})$ 的负特征值的重数.

对于 $\lambda\in\varLambda$, 记

$$k_i^{\lambda}=\dim\left(\bigcup_{l=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-M_i)^l\right)\geqslant 0,\quad 1\leqslant i\leqslant i_0.$$

那么, $k_i^{\lambda}>0$ 当且仅当 λ 是 M_i 的特征值.

先证明

$$\dim U^{\lambda}=\sum_{i=1}^{i_0}m_ik_i^{\lambda}.$$

记 $I_{\lambda}=\{i:1\leqslant i\leqslant i_0,\ k_i^{\lambda}>0\}$, 并且对于 $i\in I_{\lambda}$, 记 $\boldsymbol{c}_1^i,\cdots,\boldsymbol{c}_{k_i^{\lambda}}^i$ 是 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-M_i)^l$ 中的一组基. 那么函数集

$$\left\{\boldsymbol{c}_l^i\phi_{ij}:1\leqslant l\leqslant k_i^{\lambda},\ 1\leqslant j\leqslant m_i,\ i\in I_{\lambda}\right\}\tag{6.1.9}$$

是 U^{λ} 中的一组基. 事实上, 对于任给的 $\phi\in U^{\lambda}$, 按照定义有

$$\phi=\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{m_i}\boldsymbol{c}_{ij}\phi_{ij},\quad 其中\ \boldsymbol{c}_{ij}\in\bigcup_{l=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-M_i)^l.$$

注意到当 $i\in I_{\lambda}$ 时, $\{\boldsymbol{c}_1^i,\cdots,\boldsymbol{c}_{k_i^{\lambda}}^i\}$ 是 $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-M_i)^l$ 中的一组基, 而当 $i\notin I_{\lambda}$ 时, $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\mathscr{N}(\lambda I-M_i)^l=\{0\}$, 故有

$$\boldsymbol{c}_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{l=1}^{k_i^{\lambda}}b_l^{ij}\boldsymbol{c}_l^i, & i\in I_{\lambda},\\ 0, & i\notin I_{\lambda},\end{cases}$$

从而有

$$\phi=\sum_{i\in I_{\lambda}}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{l=1}^{k_i^{\lambda}}b_l^{ij}\boldsymbol{c}_l^i\phi_{ij}.$$

这说明 U^λ 中的函数可以用式 (6.1.9) 中的函数表示.

显然式 (6.1.9) 中的函数是线性无关的, 因此

$$\dim U^\lambda = \sum_{i\in I_\lambda} m_i k_i^\lambda = \sum_{i=1}^{i_0} m_i k_i^\lambda.$$

又因为 $E^\lambda = U^\lambda$, 所以 λ 的代数重数

$$\sigma(\lambda) = \dim E^\lambda = \sum_{i=1}^{i_0} m_i k_i^\lambda. \tag{6.1.10}$$

第六步 在模 2 的意义下, 化简 $\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma(\lambda)$.

首先, 根据式 (6.1.10) 和 Λ 是有限集的事实易知

$$\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma(\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{i_0} m_i k_i^\lambda = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \sum_{\lambda\in\Lambda} k_i^\lambda. \tag{6.1.11}$$

定义

$$\begin{aligned} H(\mu) = H(\tilde{u};\mu) &:= \det\left\{\mu I - \Phi_u^{-1}(\tilde{u})G_u(\tilde{u})\right\} \\ &= \det\left\{(\mu-\mu_i)I + (1+\mu_i)M_i\right\}. \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

容易看出$\lambda = \dfrac{\mu_i - \mu}{1+\mu_i}$ 是 M_i 的特征值当且仅当 $H(\mu) = 0$, 所以 $H(\mu_i) \neq 0$ 当且仅当 M_i 是非退化的. 利用多项式的根与系数的关系易知: 当 $H(\mu_i)\neq 0$ 时, 矩阵 M_i 的负特征值的代数重数之和是奇数当且仅当 $H(\mu_i) < 0$, 即

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} k_i^\lambda \text{ 是奇数当且仅当 } H(\mu_i) < 0.$$

由式 (6.1.11) 得, 在模 2 的意义下

$$\gamma = \sum_{1\leqslant i\leqslant i_0,\, H(\mu_i)<0} m_i.$$

又因为当 $i > i_0$ 时, M_i 没有负特征值, 所以 $H(\mu_i) = (1+\mu_i)^m \det M_i > 0$. 因此在模 2 的意义下

$$\gamma = \sum_{i\geqslant 1,\, H(\mu_i)<0} m_i.$$

这样就得到下面的定理.

定理 6.1.1　*假设对所有的* $i \geqslant 1$, $H(\mu_i) \neq 0$. *那么*

$$\mathrm{index}(I - \mathcal{F}(\cdot), \tilde{u}) = (-1)^{\gamma}, \quad \text{其中 } \gamma = \sum_{i \geqslant 1,\, H(\mu_i) < 0} m_i.$$

该定理把指数 $\mathrm{index}\,(I - \mathcal{F}(\cdot), \tilde{u})$ 的计算转化为确定那些使得 $H(\mu_i) < 0$ 的 μ_i 的代数重数之和. 由于

$$H(\mu) = \det\{\Phi_u^{-1}(\tilde{u})\} \det\{\mu \Phi_u(\tilde{u}) - G_u(\tilde{u})\}, \tag{6.1.13}$$

且 $\det\{\Phi_u^{-1}(\tilde{u})\}$ 是正的, 为了计算指数 $\mathrm{index}\,(I - \mathcal{F}(\cdot), \tilde{u})$, 只需确定那些使得 $\det\{\mu_i \Phi_u(\tilde{u}) - G_u(\tilde{u})\} < 0$ 的 μ_i 的代数重数之和.

6.2　一个具有约定机制的三种群模型

本节的题材选自文献 [27], 我们研究下面的具有约定机制的三种群模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u\left(-1 + \dfrac{vw}{u+v}\right), \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\left(-\alpha + \dfrac{\beta uw}{u+v}\right), \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = w\left(r - w - \dfrac{(1+\beta)uv}{u+v}\right), \end{cases} \tag{6.2.1}$$

其中 α, β 和 r 都是正常数, u 和 v 是两种猎物的分布密度, w 是食物的分布密度.

记 $U = (u, v, w)^{\mathrm{T}}$, 容易看出方程组 (6.2.1) 存在正平衡态 $\tilde{U}$ 当且仅当

$$r\beta > \alpha + \beta, \tag{6.2.2}$$

同时当条件 (6.2.2) 成立时, 正平衡态 $\widetilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 唯一存在且

$$\begin{cases} \tilde{u} = (\alpha+\beta)\dfrac{r\beta - (\alpha+\beta)}{\beta^2(1+\beta)}, \\[2mm] \tilde{v} = (\alpha+\beta)\dfrac{r\beta - (\alpha+\beta)}{\alpha\beta(1+\beta)}, \\[2mm] \tilde{w} = \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}. \end{cases} \tag{6.2.3}$$

本节总假设条件 (6.2.2) 成立.

下面考虑非均匀分布的情况. 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个具有光滑边界的有界区域. 如果认为物种的分布密度不均匀, 那么该捕食模型可用如下反应扩散方程组的初边值问题来描述:

$$
\begin{cases}
u_t - d_1\Delta u = G_1(U), & x \in \Omega,\ t > 0, \\
v_t - d_2\Delta v = G_2(U), & x \in \Omega,\ t > 0, \\
w_t - d_3\Delta w = G_3(U), & x \in \Omega,\ t > 0, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\
u(x,0),\ v(x,0),\ w(x,0) \geqslant 0, & x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{6.2.4}
$$

其中

$$
G_1(U) = ug_1(U), \quad g_1(U) = -1 + \frac{vw}{u+v},
$$

$$
G_2(U) = vg_2(U), \quad g_2(U) = -\alpha + \frac{\beta uw}{u+v},
$$

$$
G_3(U) = wg_3(U), \quad g_1(U) = r - w - \frac{(1+\beta)uv}{u+v}.
$$

上面的齐次 Neumann 边界条件表示系统是封闭的, 即物种通过边界既没有流出也没有流入. 显然 $\widetilde{U}$ 是问题 (6.2.4) 的唯一正常数平衡解.

食物为了自身保护会采取防御措施, 而猎物为了瓦解食物的这种防御措施也会采取新的策略. 为此我们引入猎物之间的交错扩散. 因为在问题 (6.2.4) 中两种猎物是互助关系, 我们仅在第一个方程中引入交错扩散项

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta\left(d_1 u + \dfrac{ku}{\varepsilon + v^2}\right) = G_1(U), & x \in \Omega,\ t > 0, \\
v_t - d_2\Delta v = G_2(U), & x \in \Omega,\ t > 0, \\
w_t - d_3\Delta w = G_3(U), & x \in \Omega,\ t > 0, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\
u(x,0),\ v(x,0),\ w(x,0) \geqslant 0, & x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{6.2.5}
$$

其中 k 和 ε 都是正常数, k 被称为交错扩散系数. 在这个模型中, 猎物 u 的扩散流量是

$$
J = -\nabla\left(d_1 u + \frac{ku}{\varepsilon + v^2}\right) = -\left(d_1 + \frac{k}{\varepsilon + v^2}\right)\nabla u + \frac{2kuv}{(\varepsilon + v^2)^2}\nabla v.
$$

由于 $2kuv(\varepsilon + v^2)^{-2} \geqslant 0$, 所以 $\dfrac{2kuv}{(\varepsilon + v^2)^2}\nabla v$ 的方向与 v 增加的方向相同, 表示 u 向着 v 的密度大的方向运动.

本节我们将证明:

(1) 正常数平衡解 $\tilde{U}$ 对于常微分问题 (6.2.1) 和偏微分问题 (6.2.4) 而言, 关于正解都是全局渐近稳定的, 从而问题 (6.2.4) 不存在非常数的正平衡解;

(2) 当交错扩散系数 k 很大 (其余参数固定) 或者扩散系数 d_3 很大 (其余参数固定) 时, 问题 (6.2.5) 存在不是常数的正平衡解, 即交错扩散可以导致非均匀平衡态.

这两个事实说明: 对于该模型, 一般扩散 (“简单”扩散) 不能导致非均匀平衡态, 而交错扩散可以导致非均匀平衡态.

6.2.1　$\widetilde{U}$ 的全局渐近稳定性 —— 常微分问题 (6.2.1)

设 $U(t)=(u(t),v(t),w(t))$ 是常微分方程组 (6.2.1) 的正解, 即 $u(t)>0$, $v(t)>0$, $w(t)>0$, 容易证明 $u(t)$, $v(t)$ 和 $w(t)$ 都是有界的.

定理 6.2.1　常微分方程组 (6.2.1) 的正平衡态 $\widetilde{U}$ 关于正解是全局渐近稳定的, 即

$$\lim_{t\to\infty} U(t)=\widetilde{U}$$

对于方程组 (6.2.1) 的每个正解 $U(t)=(u(t),v(t),w(t))$ 都成立.

证明　定义

$$\begin{aligned}E(t)=E(U)(t)=&p\left[u-\tilde{u}-\tilde{u}\ln\left(\frac{u}{\tilde{u}}\right)\right]+v-\tilde{v}-\tilde{v}\ln\left(\frac{v}{\tilde{v}}\right)\\&+q\left[w-\tilde{w}-\tilde{w}\ln\left(\frac{w}{\tilde{w}}\right)\right],\end{aligned}$$

其中

$$p=\frac{\beta^2}{\alpha},\quad q=\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha(1+\beta)}. \tag{6.2.6}$$

那么 $E(\widetilde{U})=0$, 并且当 $U\neq\widetilde{U}$ 时, $E(U)>0$. 计算知

$$\begin{aligned}E'(t)=&p\left(1-\frac{\tilde{u}}{u}\right)u'+\left(1-\frac{\tilde{v}}{v}\right)v'+q\left(1-\frac{\tilde{w}}{w}\right)w'\\=&p(u-\tilde{u})g_1(U)+(v-\tilde{v})g_2(U)+q(w-\tilde{w})g_3(U)\\=&p\tilde{u}+\alpha\tilde{v}-rq\tilde{w}-\left[pu+\alpha v-rqw+qw(w-\tilde{w})\right]\\&+\left[p+\beta-q(1+\beta)\right]\frac{uvw}{u+v}+\frac{q(1+\beta)\tilde{w}uv-\beta\tilde{v}uw-p\tilde{u}vw}{u+v}.\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

利用式 (6.2.3) 和式 (6.2.6), 有

$$\begin{cases}p+\beta-q(1+\beta)=0,\quad p\tilde{u}+\alpha\tilde{v}-rq\tilde{w}=-\dfrac{(\alpha+\beta)^3}{\alpha\beta(1+\beta)},\\[2mm] p\tilde{u}=\beta\tilde{v},\quad q(1+\beta)\tilde{w}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha},\quad rq+q\tilde{w}-\beta\tilde{v}=\dfrac{2(\alpha+\beta)^2}{\alpha(1+\beta)},\end{cases}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&-\left[pu+\alpha v-rqw+qw(w-\tilde{w})\right]+\frac{q(1+\beta)\tilde{w}uv-\beta\tilde{v}uw-p\tilde{u}vw}{u+v}\\
=&-pu-\alpha v+rqw-qw^2+q\tilde{w}w+\frac{(\alpha+\beta)^2uv}{\alpha(u+v)}-\beta\tilde{v}w\\
=&-pu-\alpha v+(rq+q\tilde{w}-\beta\tilde{v})w-qw^2+\frac{(\alpha+\beta)^2uv}{\alpha(u+v)}\\
=&-qw^2+\frac{2(\alpha+\beta)^2}{\alpha(1+\beta)}w-\frac{(\beta u-\alpha v)^2}{\alpha(u+v)}.
\end{aligned}
\tag{6.2.8}
$$

由式 (6.2.7) 和式 (6.2.8) 得

$$
\begin{aligned}
E'(t)=&-\frac{(\beta u-\alpha v)^2}{\alpha(u+v)}-\left(qw^2-\frac{2(\alpha+\beta)^2}{\alpha(1+\beta)}w+\frac{(\alpha+\beta)^3}{\alpha\beta(1+\beta)}\right)\\
=&-\frac{(\beta u-\alpha v)^2}{\alpha(u+v)}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta(1+\beta)}(\alpha+\beta-\beta w)^2\leqslant 0,\\
E'(t)<&\,0\quad \text{如果}\quad U\neq\tilde{U}.
\end{aligned}
$$

根据 Lyapunov-LaSalle 不变原理[28], $\tilde{U}$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

6.2.2 $\tilde{U}$ 的全局渐近稳定性 —— 偏微分问题 (6.2.4)

本节将证明无论扩散系数 d_1,d_2,d_3 如何变化, 对反应扩散方程组的初边值问题 (6.2.4) 而言, 正常数平衡解 $\tilde{U}$ 关于正解也是全局渐近稳定的. 因而这种简单扩散不能够导致非均匀平衡态, 即不能导致非常数正平衡解的出现. 这里采用 6.1 节的记号 (相当于那里的 $m=3$).

为了后面的应用, 我们先引述三个已知结论.

命题 6.2.1 ([29, 3.5 节的练习 4]) 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, $a_i(x,t)$ 和 $b(x,t)$ 都是连续的实函数, 并且在 $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上有界, 而 u 是问题

$$
u_t=\Delta u+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u
$$

在 $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上的解, 在 $\partial\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上满足$u\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\leqslant 0$. 假定对某个 $1\leqslant p<\infty$, $u(x,0)\in L^p(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 并且 $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}$ 关于 $t\geqslant 0$ 一致有界. 那么 $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\Omega)}$ 关于 $t\geqslant 0$ 和 $q=2^jp$ $(j=1,2,\cdots)$ 一致有界.

考察反应扩散方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_{it} - d_i \Delta u_i = f_i(x, t, u_1, \cdots, u_m), & x \in \Omega, \ \ t > 0, \\ u_i = 0 \ \text{或者} \ \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \ \ t > 0, \\ u_i(x, 0) = \phi_i(x), \ \ i = 1, \cdots, m, & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{6.2.9}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, ϕ_i 是满足边界条件的非负连续函数, $f_i \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$, $f_i\big|_{u_i=0} = 0, i = 1, \cdots, m$.

命题 6.2.2 ([30, 定理 A_2])　假设 $(u_1, \cdots, u_m)$ 是问题 (6.2.9) 的整体解, 并且存在正常数 K, 使得

$$|u_i(x, t)| \leqslant K, \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ t \geqslant 0, \ \ i = 1, \cdots, m.$$

则存在正常数 M, 使得

$$\|u_i(\cdot, t)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant M, \ \ t \geqslant 1, \ \ i = 1, \cdots, m,$$

这里 $0 < \alpha < 1$.

命题 6.2.3 ([18, 引理 2.5.3])　设 a 是正常数, g, $h \in C^1([a, \infty))$, $h \geqslant 0$ 并且 g 下方有界. 如果存在正常数 b 和 C, 使得

$$g'(t) \leqslant -bh(t), \ \ h'(t) \leqslant C, \ \ t \in [a, \infty),$$

那么 $\lim\limits_{t \to \infty} h(t) = 0$.

显然问题 (6.2.4) 存在唯一非负整体解 $U = (u, v, w)$. 由强极值原理知, 当 $u(x, 0) \not\equiv 0$ 时, $u(x, t) > 0$ 在 $\bar{\Omega} \times (0, \infty)$ 上成立. 对于 v 和 w 也有同样的结论. 下面我们总假设 $u(x, 0) \not\equiv 0$, $v(x, 0) \not\equiv 0$, $w(x, 0) \not\equiv 0$. 利用最大值原理易得

$$\sup_{\bar{\Omega} \times [0, \infty)} w(x, t) \leqslant \max\{r, \max_{\bar{\Omega}} w_0(x)\}. \tag{6.2.10}$$

在 Ω 上积分问题 (6.2.4) 中的方程并把结果相加, 再利用估计式 (6.2.10) 得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega (u + v + w)\mathrm{d}x &= -\int_\Omega (u + \alpha v)\mathrm{d}x + \int_\Omega w(r - w)\mathrm{d}x \\ &\leqslant -\min\{1, \alpha\} \int_\Omega (u + v + w)\mathrm{d}x + C, \end{aligned}$$

这里的 C 是一个仅依赖于 r 和 $\max\limits_{\bar{\Omega}} w(x, 0)$ 的正常数. 因此 $\|U(t)\|_{L^1(\Omega)}$ 在 $[0, \infty)$ 上有界. 利用命题 6.2.1 知, $\|U(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ 在 $[0, \infty)$ 上也有界.

定理 6.2.2　对于反应扩散方程组的初边值问题 (6.2.4) 而言, 正常数平衡解 $\widetilde{U}$ 关于正解是全局渐近稳定的. 因而问题 (6.2.4) 没有非常数正平衡解.

证明 把证明分成两步.

第一步 证明 $\widetilde{U}$ 的局部渐近稳定性. 简记

$$\mathcal{D}=\operatorname{diag}(d_1,\,d_2,\,d_3),\quad G(U)=(G_1(U),\,G_2(U),\,G_3(U))^{\mathrm{T}},\quad \mathcal{L}=\mathcal{D}\Delta+G_U(\widetilde{U}),$$

那么问题 (6.2.4) 在点 $\widetilde{U}$ 处的线性化是

$$u_t=\mathcal{L}U.$$

从上节的讨论可以看出对每个 $i\geqslant 1$, X_i 在算子 $\mathcal{L}$ 的作用下是不变的, λ 是 $\mathcal{L}$ 在 X_i 上的特征值当且仅当 λ 是矩阵 $-\mu_i\mathcal{D}+G_U(\widetilde{U})$ 的特征值.

矩阵 $-\mu_i\mathcal{D}+G_U(\widetilde{U})$ 的特征多项式是

$$\psi_i(\lambda)=\lambda^3+B_1\lambda^2+B_2\lambda+B_3,$$

其中

$$\begin{aligned}
B_1=&\mu_i(d_1+d_2+d_3)+\tilde{w}+\frac{(1+\beta)\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}>0,\\
B_2=&\mu_i^2(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)+\mu_i\left((d_1+d_2)\tilde{w}+(d_1+d_3)\frac{\beta\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\right.\\
&\left.+(d_2+d_3)\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\right)+(1+\beta)\left(\frac{\tilde{u}\tilde{w}}{\tilde{u}+\tilde{v}}+\frac{\tilde{u}\tilde{v}(\tilde{v}+\alpha\tilde{u})}{(\tilde{u}+\tilde{v})^2}\right)>0,\\
B_3=&\mu_i^3d_1d_2d_3+\mu_i^2\left(d_1d_2\tilde{w}+d_1d_3\frac{\beta\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}+d_2d_3\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\right)\\
&+\mu_i\left[\frac{d_1\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\left(\beta\tilde{w}+\frac{\alpha(1+\beta)\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\right)+d_2\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\left(\tilde{w}+\frac{(1+\beta)\tilde{v}^2}{\tilde{u}+\tilde{v}}\right)\right]\\
&+(1+\beta)(\alpha+\beta)^2\frac{\tilde{u}^2\tilde{v}^2}{\beta(\tilde{u}+\tilde{v})^3}>0.
\end{aligned}$$

直接计算知

$$B_1B_2-B_3=c_3\mu_i^3+c_2\mu_i^2+\mu_i(c_{11}d_1+c_{12}d_2+c_{13}d_3)+A_1A_2-A_3,$$

其中常数 c_3, c_2, c_{11}, c_{12} 和 c_{13} 都是正的 (我们略去这几个常数的具体表达式),

$$\begin{aligned}
A_1&=\tilde{w}+\frac{(1+\beta)\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}>0,\\
A_2&=(1+\beta)\left(\frac{\tilde{u}\tilde{w}}{\tilde{u}+\tilde{v}}+\tilde{u}\tilde{v}\frac{\tilde{v}+\alpha\tilde{u}}{(\tilde{u}+\tilde{v})^2}\right)>0,\\
A_3&=-\det\{G_U(\widetilde{U})\}=(1+\beta)(\alpha+\beta)^2\frac{\tilde{u}^2\tilde{v}^2}{\beta(\tilde{u}+\tilde{v})^3}>0.
\end{aligned}$$

不难验证

$$\begin{aligned}A_1A_2-A_3&>\frac{(1+\beta)\tilde{u}}{\tilde{u}+\tilde{v}}(1+\beta)\tilde{u}\tilde{v}\frac{\tilde{v}+\alpha\tilde{u}}{(\tilde{u}+\tilde{v})^2}-(1+\beta)(\alpha+\beta)^2\frac{\tilde{u}^2\tilde{v}^2}{\beta(\tilde{u}+\tilde{v})^3}\\&=\frac{(1+\beta)\tilde{u}^2\tilde{v}}{\beta(\tilde{u}+\tilde{v})^3}[\beta(1+\beta)(\alpha\tilde{u}+\tilde{v})-(\alpha+\beta)^2\tilde{v}]\\&=(1+\beta)(1-\alpha)^2\frac{\tilde{u}^2\tilde{v}^2}{(\tilde{u}+\tilde{v})^3}\\&>0.\end{aligned}$$

因此 $B_1B_2-B_3>0$. 根据 Routh-Hurwitz 判别定理, 对于每个 $i\geqslant 1$ 代数方程 $\psi_i(\lambda)=0$ 的 3 个根 λ_{i1}, λ_{i2} 和 λ_{i3} 都有负实部.

下面证明存在正常数 δ, 使得

$$\mathrm{Re}\,\lambda_{i1},\ \mathrm{Re}\,\lambda_{i2},\ \mathrm{Re}\,\lambda_{i3}\leqslant-\delta,\quad \forall\, i\geqslant 1. \tag{6.2.11}$$

这说明算子 $\mathcal{L}$ 的谱位于左半平面 $\{\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant-\delta\}$, 从而可得 $\widetilde{U}$ 的局部渐近稳定性 [29, 定理 5.1.1].

现在证明估计式 (6.2.11). 做变换 $\lambda=\mu_i\xi$, 则有

$$\psi_i(\lambda)=\mu_i^3\xi^3+B_1\mu_i^2\xi^2+B_2\mu_i\xi+B_3:=\tilde{\psi}_i(\xi).$$

因为当 $i\longrightarrow\infty$ 时, $\mu_i\longrightarrow\infty$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}\{\tilde{\psi}_i(\xi)/\mu_i^3\}&=\xi^3+(d_1+d_2+d_3)\xi^2+(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)\xi+d_1d_2d_3\\&:=\bar{\psi}(\xi).\end{aligned}$$

利用 Routh-Hurwitz 判别定理, 代数方程 $\bar{\psi}(\xi)=0$ 的三个根 ξ_1,ξ_2 和 ξ_3 都具有负实部. 故存在正常数 $\bar{\delta}$, 使得 $\mathrm{Re}\,\xi_1$, $\mathrm{Re}\,\xi_2$, $\mathrm{Re}\,\xi_3\leqslant-\bar{\delta}$. 再由连续性, 存在 i_0 使得对所有的 $i\geqslant i_0$, 代数方程 $\tilde{\psi}_i(\xi)=0$ 的三个根 $\xi_{i1},\xi_{i2},\xi_{i3}$ 满足 $\mathrm{Re}\,\xi_{i1}$, $\mathrm{Re}\,\xi_{i2}$, $\mathrm{Re}\,\xi_{i3}\leqslant-\bar{\delta}/2$. 于是对所有的 $i\geqslant i_0$ (不妨认为 $\mu_i\geqslant 1$), 有 $\mathrm{Re}\,\lambda_{i1}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{i2}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{i3}\leqslant-\mu_i\bar{\delta}/2\leqslant-\bar{\delta}/2$. 取

$$-\delta^*=\max_{1\leqslant i\leqslant i_0}\{\mathrm{Re}\,\lambda_{i1},\ \mathrm{Re}\,\lambda_{i2},\ \mathrm{Re}\,\lambda_{i3}\},$$

则 $\delta^*>0$. 因而估计式 (6.2.11) 对于 $\delta=\min\{\delta^*,\ \bar{\delta}/2\}$ 成立.

第二步 证明 $\widetilde{U}$ 的全局渐近稳定性. 下面用 C 表示一般常数. 由于问题 (6.2.4) 的解 $U(\cdot,t)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致有界, 即 $\|U(\cdot,t)\|_\infty\leqslant C$, $\forall\, t\geqslant 0$, 利用命题 6.2.2 知,

$$\|U(\cdot,t)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})}\leqslant C,\quad \forall\, t\geqslant 1. \tag{6.2.12}$$

定义

$$E(t)=\int_\Omega\left\{p\left[u-\tilde{u}-\tilde{u}\ln\left(\frac{u}{\tilde{u}}\right)\right]+v-\tilde{v}-\tilde{v}\ln\left(\frac{v}{\tilde{v}}\right)\right.$$
$$\left.+q\left[w-\tilde{w}-\tilde{w}\ln\left(\frac{w}{\tilde{w}}\right)\right]\right\}\mathrm{d}x,$$

其中 p 和 q 由式 (6.2.6) 给出, 那么 $E(t)\geqslant 0$ 并且

$$E'(t)=-\int_\Omega\left(\frac{pd_1\tilde{u}}{u^2}|\nabla u|^2+\frac{d_2\tilde{v}}{v^2}|\nabla v|^2+\frac{qd_3\tilde{w}}{w^2}|\nabla w|^2\right)\mathrm{d}x$$
$$+\int_\Omega\left[p(u-\tilde{u})g_1(U)+(v-\tilde{v})g_2(U)+q(w-\tilde{w})g_3(U)\right]\mathrm{d}x.$$

利用

$$p(u-\tilde{u})g_1(U)+(v-\tilde{v})g_2(U)+q(w-\tilde{w})g_3(U)$$
$$=-\frac{(\beta u-\alpha v)^2}{\alpha(u+v)}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta(1+\beta)}(\alpha+\beta-\beta w)^2,$$

得

$$E'(t)=-\int_\Omega\left(\frac{pd_1\tilde{u}}{u^2}|\nabla u|^2+\frac{d_2\tilde{v}}{v^2}|\nabla v|^2+\frac{qd_3\tilde{w}}{w^2}|\nabla w|^2\right)\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega\left(\frac{(\beta u-\alpha v)^2}{\alpha(u+v)}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta(1+\beta)}(\alpha+\beta-\beta w)^2\right)\mathrm{d}x.$$

由于 $|U|^2\leqslant C$, 故有

$$E'(t)\leqslant-\frac{1}{C}\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+|\nabla w|^2)\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega\left(\frac{(\beta u-\alpha v)^2}{\alpha(u+v)}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta(1+\beta)}(\alpha+\beta-\beta w)^2\right)\mathrm{d}x$$
$$:=-\psi_3(t)-\psi_4(t). \tag{6.2.13}$$

根据估计式 (6.2.12) 和初边值问题 (6.2.4), 函数 $\psi_3'(t)$ 和 $\psi_4'(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上有界. 运用命题 6.2.3 于微分不等式 (6.2.13) 得, $\lim\limits_{t\to\infty}\psi_3(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\psi_4(t)=0$. 因此

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+|\nabla w|^2)\mathrm{d}x=0, \tag{6.2.14}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega\frac{(\beta u-\alpha v)^2}{(u+v)}\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{t\to\infty}\int_\Omega(\alpha+\beta-\beta w)^2\mathrm{d}x=0. \tag{6.2.15}$$

利用式 (6.2.14) 和 Poincaré 不等式知

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega [(u-\bar{u})^2+(v-\bar{v})^2+(w-\bar{w})^2]\mathrm{d}x=0, \tag{6.2.16}$$

这里 $\bar{f}=\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega f\mathrm{d}x$ 表示 f 在 Ω 上的平均. 由式 (6.2.15) 又得

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega (w-\tilde{w})^2\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_\Omega |\alpha v-\beta u|\mathrm{d}x=0. \tag{6.2.17}$$

根据式 (6.2.16) 和式 (6.2.17), 我们有 $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{w}(t)=\tilde{w}$.

对问题 (6.2.4) 的第一个方程在 Ω 上积分, 再利用式 (6.2.17) 可推出, 当 $t\longrightarrow\infty$ 时,

$$|\Omega|\bar{u}'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(t)\mathrm{d}x=\int_\Omega \frac{u(\alpha v-\beta u)}{\beta(u+v)}\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{uv}{u+v}(w-\tilde{w})\mathrm{d}x\longrightarrow 0.$$

类似地有 $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{v}'(t)=0$. 因为 $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{w}(t)=\tilde{w}$ 并且 $\bar{u}(t)$ 和 $\bar{v}(t)$ 都有界, 故存在序列 $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ $(t_m\longrightarrow\infty)$ 和非负常数 $\hat{u}$, 使得

$$\bar{w}'(t_m)\longrightarrow 0,\quad \bar{u}(t_m)\longrightarrow \hat{u},\quad \bar{v}(t_m)\longrightarrow \hat{u}\beta/\alpha. \tag{6.2.18}$$

在 $t=t_m$ 处改写

$$\begin{aligned}|\Omega|\bar{w}'(t_m)=&\int_\Omega (w-\tilde{w})\Big(r-w-\tilde{w}-(1+\beta)\frac{uv}{u+v}\Big)\mathrm{d}x\\&+\tilde{w}\int_\Omega\Big(r-\tilde{w}-\frac{\beta(1+\beta)}{\alpha+\beta}u\Big)\mathrm{d}x+\frac{1+\beta}{\beta}\int_\Omega\frac{u(\beta u-\alpha v)}{u+v}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到式 (6.2.17) 和式 (6.2.18), 从上式推出

$$r-\tilde{w}-\hat{u}\beta(1+\beta)/(\alpha+\beta)=0,$$

因而 $\hat{u}=\tilde{u}$, 进而得到

$$\lim_{m\to\infty}\bar{U}(t_m)=\widetilde{U}. \tag{6.2.19}$$

由于 $\|U(\cdot,t_m)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})}\leqslant C$, 故存在 $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ 的子列仍记为它自身, 和非负函数 $\xi,\eta,\zeta\in C^2(\bar{\Omega})$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\big\|U(\cdot,t_m)-\big(\xi(\cdot),\eta(\cdot),\zeta(\cdot)\big)\big\|_{C^2(\bar{\Omega})}=0.$$

再利用极限 (6.2.16) 和极限 (6.2.19), 我们有 $(\xi,\eta,\zeta)=\widetilde{U}$. 因此

$$\lim_{m\to\infty}\|U(\cdot,t_m)-\widetilde{U}\|_{C^2(\bar{\Omega})}=0. \tag{6.2.20}$$

根据 $\tilde{U}$ 的局部渐近稳定性和式 (6.2.20) 容易推出 $\tilde{U}$ 的全局渐近稳定性. 定理得证.

注 6.2.1 关于定理 6.2.2 的证明, 根据式 (6.2.20)(子列极限是固定的, 与子列的取法无关), 利用反证法并重复第二步的讨论, 可以直接证明 $\tilde{U}$ 的全局渐近稳定性, 而不需要第一步的讨论, 即不需要单独讨论 $\tilde{U}$ 的局部渐近稳定性. 我们目前的处理方式, 其目的是顺便为读者介绍一种研究反应扩散方程组常数平衡解的局部渐近稳定性的方法.

6.2.3 交错扩散问题的正平衡解的估计

问题 (6.2.5) 的平衡解问题是

$$\begin{cases} -\Delta\Big(d_1u+\dfrac{ku}{\varepsilon+v^2}\Big)=G_1(U), & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta v=G_2(U), & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta w=G_3(U), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2.21}$$

利用拓扑度理论研究解的存在性, 关键一步是解的先验估计. 特别地, 为了得到正解的存在性, 还要给出正的下界估计. 本节给出问题 (6.2.21) 的正解的上界估计和正的下界估计.

为了书写方便, 下面我们简记 $\Lambda=(\alpha,\beta,r)$.

定理 6.2.3 (上界估计) 设 d 是固定的正常数. 则存在正常数 $C(\Lambda,d)$ 和 $\bar{C}(\Lambda,d)$, 当 $d_i\geqslant d$ 时问题 (6.2.21) 的正解 (u,v,w) 满足

$$\begin{cases} \max\limits_{\bar\Omega}u\leqslant C(\Lambda,d)\min\limits_{\bar\Omega}u, & \max\limits_{\bar\Omega}u\leqslant \bar{C}(\Lambda,d),\\ \max\limits_{\bar\Omega}v\leqslant C(\Lambda,d)\min\limits_{\bar\Omega}v, & \max\limits_{\bar\Omega}v\leqslant \bar{C}(\Lambda,d),\\ \max\limits_{\bar\Omega}w\leqslant C(\Lambda,d)\min\limits_{\bar\Omega}w, & \max\limits_{\bar\Omega}w\leqslant \bar{C}(\Lambda,d). \end{cases} \tag{6.2.22}$$

证明 直接对问题 (6.2.21) 的第三个方程利用最大值原理得 $w\leqslant r$. 定义

$$z=d_1u+\frac{ku}{\varepsilon+v^2}+d_2v+d_3w,$$

则有

$$\begin{cases} -\Delta z=-u-\alpha v+w(r-w), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial z}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

设 $z(x_0)=\max_{\bar\Omega}z$. 由定理 B.1.6,

$$u(x_0)+\alpha v(x_0)\leqslant w(x_0)(r-w(x_0))\leqslant r^2. \tag{6.2.23}$$

注意到 $0<uw/(u+v)\leqslant w\leqslant r$, 应用定理 B.1.5 于问题 (6.2.21) 的第二个方程, 存在正常数 $C_1=C_1(\Lambda,\,d)$, 使得 $\max_{\bar\Omega} v\leqslant C_1\min_{\bar\Omega} v$. 再利用估计式 (6.2.23), 存在正常数 $C_2=C_2(\Lambda,\,d)$, 使得 $v\leqslant C_2$ 在 $\bar\Omega$ 上成立.

记 $\varphi=d_1u+ku/(\varepsilon+v^2)$, 则有

$$\begin{cases} -\Delta\varphi=\varphi\left(-1+\dfrac{vw}{u+v}\right)\left(d_1+\dfrac{k}{\varepsilon+v^2}\right)^{-1}:=c(x)\varphi, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

因为 $\|c\|_\infty\leqslant(1+r)/d_1$, 所以 Harnack 不等式对于函数 φ 也成立, 即存在正常数 $C_3=C_3(\Lambda,\,d)$, 使得 $\max_{\bar\Omega}\varphi\leqslant C_3\min_{\bar\Omega}\varphi$. 注意到 $u=\varphi\{d_1+k/(\varepsilon+v^2)\}^{-1}$, 并且

$$\max_{\bar\Omega} u\leqslant\frac{\max_{\bar\Omega}\varphi}{d_1+k/[\varepsilon+(\max_{\bar\Omega}v)^2]},\qquad \min_{\bar\Omega} u\geqslant\frac{\min_{\bar\Omega}\varphi}{d_1+k/[\varepsilon+(\min_{\bar\Omega}v)^2]},$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\max_{\bar\Omega}u}{\min_{\bar\Omega}u}&\leqslant\frac{\max_{\bar\Omega}\varphi}{\min_{\bar\Omega}\varphi}\times\frac{d_1+k/[\varepsilon+(\min_{\bar\Omega}v)^2]}{d_1+k/[\varepsilon+(\max_{\bar\Omega}v)^2]}\\ &\leqslant C_3\frac{d_1+k/[\varepsilon+(\min_{\bar\Omega}v)^2]}{d_1+k/[\varepsilon+(\max_{\bar\Omega}v)^2]}\\ &\leqslant C_3\frac{\varepsilon+(\max_{\bar\Omega}v)^2}{\varepsilon+(\min_{\bar\Omega}v)^2}\\ &\leqslant C_3\frac{(\max_{\bar\Omega}v)^2}{(\min_{\bar\Omega}v)^2}\\ &\leqslant C(\Lambda,\,d).\end{aligned}$$

再利用估计式 (6.2.23), 存在正常数 $C_4=C_4(\Lambda,\,d)$, 使得 $u\leqslant C_4$ 在 $\bar\Omega$ 上成立. 应用定理 B.1.5 于问题 (6.2.21) 的第三个方程知, Harnack 不等式对于 w 成立. 证毕.

下面给出正平衡解的下界估计. 为此, 我们先证明

引理 6.2.1 *设 k_j, ε_j 和 d_{ij} $(i=1,2,3)$ 都是正常数, $U_j=(u_j,\,v_j,\,w_j)$ 是问题 (6.2.21) 对应于 $d_i=d_{ij}$, $k=k_j$, $\varepsilon=\varepsilon_j$ 的正解. 如果 $U_j\longrightarrow\bar U$ 并且 $\bar U$ 是常向量, 那么 $\bar U=\widetilde U$.*

证明　容易看出对所有 j, 成立

$$\int_\Omega u_j\,g_1(U_j)\mathrm{d}x=0.$$

如果 $g_1(\bar{U})>0$, 那么当 j 适当大时 $g_1(U_j)>0$. 因为 u_j 是正的, 这不可能成立. 类似地 $g_1(\bar{U})<0$ 也不可能成立. 所以 $g_1(\bar{U})=0$. 同理可证 $g_2(\bar{U})=g_3(\bar{U})=0$. 故 $\bar{U}=\widetilde{U}$. 引理得证.

定理 6.2.4 (正的下界估计) 假设 d 和 ε' 是固定的正常数. 那么存在正常数 $\underline{C}(\Lambda, d, \varepsilon')$, 当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon'$ 且 $d_i\geqslant d$ $(i=1,2,3)$ 时, 问题 (6.2.21) 的任何正解 (u,v,w) 都满足

$$\min_{\bar{\Omega}} u\geqslant\underline{C}(\Lambda, d, \varepsilon'),\quad \min_{\bar{\Omega}} v\geqslant\underline{C}(\Lambda, d, \varepsilon'),\quad \min_{\bar{\Omega}} w\geqslant\underline{C}(\Lambda, d, \varepsilon').$$

证明 采用反证法. 若结论不对, 则存在序列 $\{(d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, k_j, \varepsilon_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $0<\varepsilon_j\leqslant\varepsilon'$, $d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}\geqslant d$, 使得问题 (6.2.21) 对应于 $(d_1,d_2,d_3,k,\varepsilon)=(d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, k_j, \varepsilon_j)$ 的正解 $U_j=(u_j, v_j, w_j)$ 满足

$$\lim_{j\to\infty}\min_{\bar{\Omega}} u_j=0,\quad \text{或者}\quad \lim_{j\to\infty}\min_{\bar{\Omega}} v_j=0,\quad \text{或者}\quad \lim_{j\to\infty}\min_{\bar{\Omega}} w_j=0.$$

根据估计式 (6.2.22), 上式隐含

$$\lim_{j\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} u_j=0,\quad \text{或者}\quad \lim_{j\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} v_j=0,\quad \text{或者}\quad \lim_{j\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} w_j=0. \tag{6.2.24}$$

通过选取子序列, 不妨假设当 $j\longrightarrow\infty$ 时,

$$(d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, k_j, \varepsilon_j)\to(d_1, d_2, d_3, k, \varepsilon)\in[d, \infty]^3\times[0, \infty]\times[0, \varepsilon']. \tag{6.2.25}$$

我们只讨论 $d_i<\infty$ 的情况, $i=1,2,3$. 当 d_1,d_2,d_3 中至少有一个为 ∞ 时, 证明与 $k=\infty$ 的情况类似.

先证下面的断言:

(i) 如果 $k<\infty$, 则存在非负函数 u,v,w, 使得在 $C^2(\bar{\Omega})$ 中 $(u_j, v_j, w_j)\longrightarrow(u,v,w)$, 并且 (u,v,w) 满足问题 (6.2.21);

(ii) 如果 $k=\infty$, 则存在非负函数 u,v,w, 在 $C^2(\bar{\Omega})$ 中 $(u_j, v_j, w_j)\longrightarrow(u,v,w)$, 并且存在非负常数 τ, 使得 $u=\tau(\varepsilon+v^2)$, 同时 (v, w, τ) 满足

$$\begin{cases} -d_2\Delta v=v\left(-\alpha+\dfrac{\beta\tau(\varepsilon+v^2)w}{\tau(\varepsilon+v^2)+v}\right), & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta w=w\left(r-w-\dfrac{(1+\beta)\tau(\varepsilon+v^2)v}{\tau(\varepsilon+v^2)+v}\right), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2.26}$$

如果 $\tau=0$, 从问题 (6.2.26) 中 v 的方程以及边界条件知 $v=0$, 进而由 w 的方程和边界条件得 $w=0$ 或者 $w=r$, 这与引理 6.2.1 矛盾. 因此 $\tau>0$.

为证断言 (i), 记

$$\varphi_j = u_j + \frac{k_j u_j}{d_{1j}(\varepsilon_j + v_j^2)}. \tag{6.2.27}$$

我们有

$$\begin{cases} -d_{1j}\Delta\varphi_j = G_1(U_j), & x \in \Omega, \\ -d_{2j}\Delta v_j = G_2(U_j), & x \in \Omega, \\ -d_{3j}\Delta w_j = G_3(U_j), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v_j}{\partial \nu} = \dfrac{\partial w_j}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

根据估计式 (6.2.22) 和椭圆型方程的正则性理论, 在空间 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中序列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 都有界. 从式 (6.2.27) 又可以看出, 在空间 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中序列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 有界. 类似地可以推出在空间 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中这四个序列也都是有界的. 故存在非负函数 φ 和 u, v, w, 在空间 $C^2(\bar{\Omega})$ 中

$$\lim_{j\to\infty}(\varphi_j,\, u_j,\, v_j,\, w_j) = (\varphi,\, u, v, w),$$

并且 (u, v, w) 满足问题 (6.2.21). 断言 (i) 成立.

再证断言 (ii). 假设 $k = \infty$, 即 $k_j \longrightarrow \infty$. 由于 $d_{2j}, d_{3j} \geqslant d$ 并且有上界, 同于 $k < \infty$ 的情况, 存在非负函数 v 和 w, 在 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $(v_j,\, w_j) \longrightarrow (v,\, w)$.

由于 d_{1j} 有界并且 $(u_j,\, v_j,\, w_j)$ 的上界不依赖于 k_j, 故

$$\lim_{j\to\infty}\frac{d_{1j}}{k_j} = \lim_{j\to\infty}\frac{G_1(U_j)}{k_j} = 0. \tag{6.2.28}$$

记 $\psi_j = \left(\dfrac{d_{1j}}{k_j} + \dfrac{1}{\varepsilon_j + v_j^2}\right)u_j$, 则有

$$\begin{cases} -\Delta\psi_j = \dfrac{G_1(U_j)}{k_j}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \psi_j}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2.29}$$

注意到极限 (6.2.28) 以及 ψ_j 的非负性和有界性, 从问题 (6.2.29) 可推知存在非负常数 τ, 在 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $\psi_j \longrightarrow \tau$. 由此又推出在 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $u_j \longrightarrow \tau(\varepsilon + v^2) := u$. 同上可证, 在 $C^2(\bar{\Omega})$ 中 $(\psi_j, u_j, v_j, w_j) \longrightarrow (\tau, u, v,\, w)$. 容易看出 $(v,\, w,\, \tau)$ 满足问题 (6.2.26). 断言 (ii) 成立.

现在完成定理的证明. 先讨论 $k < \infty$ 的情况. 由断言 (i) 知, 非负函数 (u, v, w) 满足问题 (6.2.21). 再由式 (6.2.24) 知, u, v, w 中至少有一个恒为零.

(1) 如果 $u=0$, 那么

$$\begin{cases} -d_2\Delta v = -\alpha v, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu}=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

所以 $v=0$. 类似地, 如果 $v=0$, 则 $u=0$. 进而 w 满足

$$\begin{cases} -d_3\Delta w = w(r-w), & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu}=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

由此知 $w=0$ 或者 $w=r$, 此与引理 6.2.1 矛盾.

(2) 如果在 $\bar{\Omega}$ 上 u,v 恒为正, 而 w 恒为零, 那么 v 满足

$$\begin{cases} -d_2\Delta v = -\alpha v, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu}=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

由此得 v 恒为零, 矛盾.

再讨论 $k=\infty$ 的情况. 我们已经知道 τ 是正常数, (v,w) 是问题 (6.2.26) 的解, 因此容易推出: $v=0$ 隐含 $w=0$ 或者 $w=r$, $w=0$ 隐含 $v=0$. 这与引理 6.2.1 相矛盾. 证毕.

6.2.4 特征多项式的分析和特征根的估计

这里采用 6.1 节中的记号:

$$\Phi(U)=(d_1u+ku/(\varepsilon+v^2),\ d_2v,\ d_3w)^{\mathrm{T}}.$$

在 6.1 节我们已经说明, 为了计算 $\widetilde{U}$ 处的不动点指数 $\operatorname{index}(I-\mathcal{F}(\cdot),\widetilde{U})$, 需要确定使得 $\det\{\mu_i\Phi_U(\widetilde{U})-G_U(\widetilde{U})\}<0$ 的那些 μ_i 的代数重数之和. 为此我们先讨论多项式 $\det\{\mu\Phi_U(\widetilde{U})-G_U(\widetilde{U})\}$. 同于 6.1 节, 直接计算知

$$\begin{aligned}(\tilde{u}+\tilde{v})^3\det\{\mu\Phi_U(\widetilde{U})-G_U(\widetilde{U})\} &= C_3\mu^3+C_2\mu^2+C_1\mu-\det\{G_U(\widetilde{U})\}(\tilde{u}+\tilde{v})^3 \\ &:=\mathcal{C}(k,d_3;\mu),\end{aligned} \tag{6.2.30}$$

其中

$$\begin{aligned} C_3 &= d_2d_3\Big(d_1+\frac{k}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\Big)(\tilde{u}+\tilde{v})^3, \\ C_2 &= d_2d_3\tilde{u}(\tilde{u}+\tilde{v})^2+d_2\Big(d_1+\frac{k}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\Big)\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})^3 \\ &\quad+\beta d_3\Big(d_1+\frac{k}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\Big)\tilde{u}(\tilde{u}+\tilde{v})^2-2k\beta d_3\frac{\tilde{u}\tilde{v}^2(\tilde{u}+\tilde{v})^2}{(\varepsilon+\tilde{v}^2)^2}, \\ C_1 &= \tilde{u}(\tilde{u}+\tilde{v})\{d_2\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})+(1+\beta)d_2\tilde{v}^2\} \end{aligned}$$

$$+\beta\Big(d_1+\frac{k}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\Big)\tilde{u}\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})^2+2k\beta(1+\beta)\frac{\tilde{u}^2\tilde{v}^3(\tilde{u}+\tilde{v})}{(\varepsilon+\tilde{v}^2)^2}$$
$$+\alpha(1+\beta)\tilde{u}^2\tilde{v}\Big(d_1+\frac{k}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\Big)(\tilde{u}+\tilde{v})-2k\beta\frac{\tilde{u}\tilde{v}^2\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})^2}{(\varepsilon+\tilde{v}^2)^2}.$$

前面已经强调, 本节的第二个目的是证明当交错扩散系数 k 很大 (其余参数固定) 或者扩散系数 d_3 很大 (其余参数固定) 时, 问题 (6.2.5) 存在非常数正平衡解. 因此, 我们需要讨论 $\mathcal{C}(k,d_3;\mu)$ 关于 k 和 d_3 的变化情况.

先考虑 $\mathcal{C}(k,d_3;\mu)$ 关于 k 的变化情况. 设 $\tilde{\mu}_1(k)$, $\tilde{\mu}_2(k)$ 和 $\tilde{\mu}_3(k)$ 是 $\mathcal{C}(k,d_3;\mu)=0$ 的三个根, 并按照顺序 $\mathrm{Re}\,\tilde{\mu}_1(k)\leqslant\mathrm{Re}\,\tilde{\mu}_2(k)\leqslant\mathrm{Re}\,\tilde{\mu}_3(k)$ 排列, 那么

$$\tilde{\mu}_1(k)\tilde{\mu}_2(k)\tilde{\mu}_3(k)=\frac{(\tilde{u}+\tilde{v})^3}{C_3}\det\{G_U(\widetilde{U})\}.$$

由于 $\det\{G_U(\widetilde{U})\}<0$, $C_3>0$, 所以 $\tilde{\mu}_1(k)$, $\tilde{\mu}_2(k)$ 和 $\tilde{\mu}_3(k)$ 中至少有一个是负数, 其余两个的乘积是正的.

上面的这些信息还不足以精确判断 $\mathcal{C}(k,d_3;\mu)=0$ 的根的变化情况. 为此我们考虑下面的极限:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{C_3}{k}=\frac{d_2d_3}{\varepsilon+\tilde{v}^2}(\tilde{u}+\tilde{v})^3:=a_3(\varepsilon),$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{C_2}{k}=\frac{(\tilde{u}+\tilde{v})^2}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\left(d_2\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})+\beta d_3\tilde{u}-2\beta d_3\frac{\tilde{u}\tilde{v}^2}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\right):=a_2(\varepsilon),$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{C_1}{k}=\frac{\tilde{u}(\tilde{u}+\tilde{v})}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\left(\beta\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})+2\beta(1+\beta)\frac{\tilde{u}\tilde{v}^3}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\right.$$
$$\left.+\alpha(1+\beta)\tilde{u}\tilde{v}-2\beta\frac{\tilde{v}^2\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\right):=a_1(\varepsilon).$$

如果参数 α,β 和 r 满足

$$\frac{r\beta}{\alpha+\beta}<1+\frac{\beta}{\alpha+2\beta},\tag{6.2.31}$$

那么

$$a_1(0)=\frac{\tilde{u}(\tilde{u}+\tilde{v})}{\tilde{v}^2}\left[\beta\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})+2\beta(1+\beta)\tilde{u}\tilde{v}+\alpha(1+\beta)\tilde{u}\tilde{v}-2\beta\tilde{w}(\tilde{u}+\tilde{v})\right]$$
$$=\tilde{u}\left(1+\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)^2\left(-\beta\tilde{w}+(\alpha+2\beta)(1+\beta)\frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{u}+\tilde{v}}\right)$$
$$=\tilde{u}\left(1+\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)^2\left[r(\alpha+2\beta)-(\alpha+3\beta)\tilde{w}\right]$$
$$=\tilde{u}\left(1+\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)^2\left(r(\alpha+2\beta)-\frac{1}{\beta}(\alpha+3\beta)(\alpha+\beta)\right)$$
$$<0.$$

利用连续性, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $a_1(\varepsilon) < 0$ 对所有 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 成立. 下面我们限制在 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 内来讨论. 这样就有 $a_1(\varepsilon) < 0$ (从而 $C_1 < 0$) 对所有充分大的 k 成立. 注意到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathcal{C}(k,d_3;\mu)}{k} = a_3(\varepsilon)\mu^3 + a_2(\varepsilon)\mu^2 + a_1(\varepsilon)\mu = \mu\big[a_3(\varepsilon)\mu^2 + a_2(\varepsilon)\mu + a_1(\varepsilon)\big],$$

并且 $a_1(\varepsilon) < 0 < a_3(\varepsilon)$, 利用连续性可知当 k 很大时, $\tilde{\mu}_1(k)$ 是负实数. 进一步, 由于 $\tilde{\mu}_2(k)\tilde{\mu}_3(k) > 0$, 所以 $\tilde{\mu}_2(k)$ 和 $\tilde{\mu}_3(k)$ 都是正实数, 并且

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\mu}_1(k) = \frac{-a_2(\varepsilon) - \sqrt{a_2^2(\varepsilon) - 4a_1(\varepsilon)a_3(\varepsilon)}}{2a_3(\varepsilon)} < 0, \quad \lim_{k\to\infty}\tilde{\mu}_2(k) = 0, \tag{6.2.32}$$

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\mu}_3(k) = \frac{-a_2(\varepsilon) + \sqrt{a_2^2(\varepsilon) - 4a_1(\varepsilon)a_3(\varepsilon)}}{2a_3(\varepsilon)} := \tilde{\mu} > 0. \tag{6.2.33}$$

这样就得到下面的命题

命题 6.2.4 假设条件 (6.2.31) 成立并且 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. 则存在正数 K, 当 $k \geqslant K$ 时, 代数方程 $\mathcal{C}(k,d_3;\mu) = 0$ 的三个根 $\tilde{\mu}_1(k)$, $\tilde{\mu}_2(k)$ 和 $\tilde{\mu}_3(k)$ 都是实的, 并且满足式 (6.2.32) 和式 (6.2.33). 此外, 对于所有的 $k \geqslant K$, 有

$$\begin{cases} -\infty < \tilde{\mu}_1(k) < 0 < \tilde{\mu}_2(k) < \tilde{\mu}_3(k), \\ \mathcal{C}(k,d_3;\mu) < 0 \quad \text{当 } \mu \in \big(-\infty, \tilde{\mu}_1(k)\big) \cup \big(\tilde{\mu}_2(k), \tilde{\mu}_3(k)\big) \text{ 时}, \\ \mathcal{C}(k,d_3;\mu) > 0 \quad \text{当 } \mu \in \big(\tilde{\mu}_1(k), \tilde{\mu}_2(k)\big) \cup \big(\tilde{\mu}_3(k), \infty\big) \text{ 时}. \end{cases} \tag{6.2.34}$$

下面讨论 $\mathcal{C}(k,d_3;\mu)$ 关于 d_3 的变化情况. 同上, 我们考虑极限:

$$\lim_{d_3\to\infty}\frac{C_3}{d_3} = d_2(\tilde{u}+\tilde{v})^3\Big(d_1 + \frac{k}{\varepsilon+\tilde{v}^2}\Big) := b_3,$$

$$\lim_{d_3\to\infty}\frac{C_2}{d_3} = \tilde{u}(\tilde{u}+\tilde{v})^2\left(d_2 + \beta d_1 + \frac{k\beta(\varepsilon-\tilde{v}^2)}{(\varepsilon+\tilde{v}^2)^2}\right) := b_2,$$

$$\lim_{d_3\to\infty}\frac{C_1}{d_3} = 0,$$

$$\lim_{d_3\to\infty}\frac{\mathcal{C}(k,d_3;\mu)}{d_3} = \mu^2[b_3\mu + b_2].$$

当参数 d_1, d_2, α, β, r, k, ε 满足 $b_2 < 0$, 即

$$(d_2 + \beta d_1)(\varepsilon + \tilde{v}^2)^2 < k\beta(\tilde{v}^2 - \varepsilon) \tag{6.2.35}$$

时, 可以建立与命题 6.2.4 类似的结果.

命题 6.2.5 假设条件 (6.2.35) 成立. 则存在正常数 D, 当 $d_3 \geqslant D$ 时代数方程 $\mathcal{C}(k, d_3; \mu) = 0$ 的三个根 $\bar{\mu}_1(d_3)$, $\bar{\mu}_2(d_3)$ 和 $\bar{\mu}_3(d_3)$ 都是实的, 并且满足

$$\lim_{d_3\to\infty} \bar{\mu}_1(d_3) = \lim_{d_3\to\infty} \bar{\mu}_2(d_3) = 0,$$

$$\lim_{d_3\to\infty} \bar{\mu}_3(d_3) = \frac{-b_2}{b_3} = \frac{\tilde{u}[k\beta(\tilde{v}^2 - \varepsilon) - (d_2 + \beta d_1)(\varepsilon + \tilde{v}^2)^2]}{d_2(\tilde{u} + \tilde{v})(\varepsilon + \tilde{v}^2)[k + d_1(\varepsilon + \tilde{v}^2)]} := \bar{\mu}. \tag{6.2.36}$$

此外当 $d_3 \geqslant D$ 时, 若用 $\bar{\mu}_i(d_3)$ 代替 $\tilde{\mu}_i(k)$, 那么估计式 (6.2.34) 仍然成立.

6.2.5 非常数正解的大范围存在性

本节研究当参数 $d_1, d_2, \varepsilon, \alpha, \beta, r$ 固定时, 问题 (6.2.21) 的非常数正解关于交错扩散系数 k 和扩散系数 d_3 的大范围存在性.

定理 6.2.5 固定参数 $\alpha, \beta, r, \varepsilon$ 和 d_i, $i = 1, 2, 3$, 使得 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 并且条件 (6.2.31) 成立. 取 $\tilde{\mu}$ 由极限 (6.2.33) 确定. 如果对某个 $j \geqslant 2$, 有 $\tilde{\mu} \in (\mu_j,\ \mu_{j+1})$ 并且和

$$\sigma_j = \sum_{i=2}^{j} \dim E(\mu_i)$$

是奇数, 则存在正常数 K, 当 $k \geqslant K$ 时问题 (6.2.21) 至少有一个非常数正解.

定理 6.2.6 固定参数 $\alpha, \beta, r, \varepsilon, d_1, d_2$ 和 k, 使得条件 (6.2.35) 成立. 取 $\bar{\mu}$ 由极限 (6.2.36) 确定. 如果对某个 $j \geqslant 2$, 有 $\bar{\mu} \in (\mu_j,\ \mu_{j+1})$ 并且和

$$\sigma_j = \sum_{i=2}^{j} \dim E(\mu_i)$$

是奇数, 则存在正常数 D, 当 $d_3 \geqslant D$ 时问题 (6.2.21) 至少有一个非常数正解.

因为这两个定理的证明类似, 这里只证明定理 6.2.5.

定理 6.2.5 的证明 由极限 (6.2.32), (6.2.33) 以及命题 6.2.4 知, 存在正常数 K, 当 $k \geqslant K$ 时关系式 (6.2.34) 成立, 并且

$$0 = \mu_1 < \tilde{\mu}_2(k) < \mu_2, \quad \tilde{\mu}_3(k) \in (\mu_j,\ \mu_{j+1}). \tag{6.2.37}$$

我们将证明当 $k \geqslant K$ 时, 问题 (6.2.21) 至少有一个非常数正解. 采用反证法和拓扑度的同伦不变性来完成证明. 假设对某个 $k = \bar{k} \geqslant K$, 问题 (6.2.21) 没有非常数正解. 下面固定 $k = \bar{k}$.

对于 $t \in [0, 1]$, 定义 $\Phi(t; U) = (d_1 u + tku/(\varepsilon + v^2),\ d_2 v,\ d_3 w)^{\mathrm{T}}$, 并考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta\Phi(t; U) = G(U), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2.38}$$

显然, U 是问题 (6.2.21) 的非常数正解当且仅当它是 $t=1$ 时问题 (6.2.38) 的非常数正解. 对于任意的 $0\leqslant t\leqslant 1$, $\widetilde{U}$ 是问题 (6.2.38) 的唯一正常数解. 同于 6.1 节, 对于任意的 $0\leqslant t\leqslant 1$, 正函数 U 是问题 (6.2.38) 的解当且仅当

$$\mathcal{F}(t;U):=U-(I-\Delta)^{-1}\left\{\Phi_U^{-1}(t;U)[G(U)+\nabla U\,\Phi_{UU}(t;U)\nabla U^{\mathrm{T}}]+U\right\}=0.$$

显然有 $\mathcal{F}(1;U)=\mathcal{F}(U)$. 由定理 6.2.2 知, 在 X^+ 内方程 $\mathcal{F}(0;U)=0$ 只有解 $\widetilde{U}$, 其中

$$X^+=\left[\left\{u\in C^1(\bar{\Omega}):\,u|_{\bar{\Omega}}>0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=0\right\}\right]^3.$$

同于 6.1 节, 我们有

$$D_U\mathcal{F}(0;\widetilde{U})=I-(I-\Delta)^{-1}\{\mathcal{D}^{-1}G_U(\widetilde{U})+I\},$$

$$D_U\mathcal{F}(1;\widetilde{U})=I-(I-\Delta)^{-1}\{\Phi_U^{-1}(\widetilde{U})G_U(\widetilde{U})+I\}=D_U\mathcal{F}(\widetilde{U}),$$

其中 $\mathcal{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,d_3)$. 根据式 (6.1.12) 和式 (6.2.30), 我们有

$$H(\mu)=\det\{\Phi_U^{-1}(\widetilde{U})\}(\tilde{u}+\tilde{v})^{-3}\mathcal{C}(k,d_3;\,\mu).\tag{6.2.39}$$

利用关系式 (6.2.34) 和 (6.2.37), 从式 (6.2.39) 可推出

$$\begin{cases}H(\mu_1)=H(0)>0,\\ H(\mu_i)<0, & 2\leqslant i\leqslant j,\\ H(\mu_i)>0, & i\geqslant j+1.\end{cases}$$

这说明对所有的 $i\geqslant 1$, 0 不是矩阵 $\mu_i I-\Phi_U^{-1}(\widetilde{U})G_U(\widetilde{U})$ 的特征值, 并且

$$\sum_{i\geqslant 1,H(\mu_i)<0}\dim E(\mu_i)=\sum_{i=2}^{j}\dim E(\mu_i)=\sigma_j$$

是奇数. 利用定理 6.1.1 得

$$\mathrm{index}\,(I-\mathcal{F}(1;\cdot),\widetilde{U})=(-1)^{\gamma}=(-1)^{\sigma_j}=-1.\tag{6.2.40}$$

类似地,

$$\mathrm{index}\,(I-\mathcal{F}(0;\cdot),\widetilde{U})=(-1)^0=1.\tag{6.2.41}$$

根据定理 6.2.3 和定理 6.2.4, 存在正常数 C, 使得对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$, 问题 (6.2.38) 的正解都满足 $1/C<u,v,w<C$. 因此在 $\partial B(C)$ 上 $\mathcal{F}(t;U)\neq 0$, $\forall\,0\leqslant t\leqslant 1$. 利用拓扑度的同伦不变性得

$$\deg\,(\mathcal{F}(1;\cdot),B(C),0)=\deg\,(\mathcal{F}(0;\cdot),B(C),0).\tag{6.2.42}$$

另一方面, 由假设条件知在 $B(C)$ 内方程 $\mathcal{F}(1;U)=0$ 和 $\mathcal{F}(0;U)=0$ 都只有正解 $\widetilde{U}$. 从而由式 (6.2.40) 和式 (6.2.41) 便得

$$\deg(\mathcal{F}(0;\cdot),B(C),0)=\operatorname{index}(I-\mathcal{F}(0;\cdot),\widetilde{U})=1,$$

$$\deg(\mathcal{F}(1;\cdot),B(C),0)=\operatorname{index}(I-\mathcal{F}(1;\cdot),\widetilde{U})=-1.$$

这与式 (6.2.42) 矛盾. 证毕.

6.3　一个具有年龄结构和交错扩散的捕食模型

本节的题材选自文献 [31], 我们研究一个具有年龄结构和交错扩散的捕食模型的非常数正平衡解, 即下面的椭圆型方程组的边值问题:

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = au-u^2-\varepsilon uv-uw, & x\in\Omega,\\ -\Delta\left(d_2v+\dfrac{d_4v}{\sigma+w^2}\right)=kuw-v, & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta w=bv-mw, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}\tag{6.3.1}$$

的非常数正解的存在性. 这里的 u 表示食物的分部密度, v 和 w 分别表示幼年和成年猎物的分部密度. 简记 $U=(u,v,w)$. 该问题存在正常数解 $\widetilde{U}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ 当且仅当 $m<abk$, 并且

$$\tilde{u}=\frac{m}{bk},\quad \tilde{v}=\frac{m(abk-m)}{bk(b+m\varepsilon)},\quad \tilde{w}=\frac{abk-m}{k(b+m\varepsilon)}.\tag{6.3.2}$$

6.3.1　先验估计

同于 6.2.3 节, 本节给出问题 (6.3.1) 的正解的上界估计和正的下界估计.

定理 6.3.1　假设 d 和 d^* 是两个固定的正常数. 则存在正常数 $C(d,d^*)$, 当 $d_1,d_2,d_3\geqslant d$ 和 $0\leqslant d_4\leqslant d^*$ 时, 问题 (6.3.1) 的每一个正解 (u,v,w) 都满足下面的估计:

$$|u,v,w|_{2+\alpha}\leqslant C(d,d^*).\tag{6.3.3}$$

证明　我们先证明估计

$$\max_{\bar{\Omega}}u,\ \max_{\bar{\Omega}}v,\ \max_{\bar{\Omega}}w\leqslant C(d,d^*).\tag{6.3.4}$$

对 u 的方程利用最大值原理可直接推出 $\max_{\bar{\Omega}} u \leqslant a$. 如果估计式 (6.3.4) 不成立, 则存在满足 $d_{1j}, d_{2j}, d_{3j} \geqslant d$ 和 $0 \leqslant d_{4j} \leqslant d^*$ 的 $(d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, d_{4j})$, 以及问题 (6.3.1) 对应于 $(d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, d_{4j})$ 的正解 (u_j, v_j, w_j), 当 $j \longrightarrow \infty$ 时有

$$\max_{\bar{\Omega}} v_j + \max_{\bar{\Omega}} w_j \longrightarrow \infty. \tag{6.3.5}$$

利用最大值原理于 w_j 的方程, 我们有

$$\max_{\bar{\Omega}} w_j \leqslant (b/m) \max_{\bar{\Omega}} v_j. \tag{6.3.6}$$

令 $\varphi_j = d_{2j} v_j + \dfrac{d_{4j} v_j}{\sigma + w_j^2}$, $x_0 \in \bar{\Omega}$ 使得 $\varphi_j(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} \varphi_j$. 利用最大值原理于 v_j 的方程得

$$v_j(x_0) \leqslant k u_j(x_0) w_j(x_0) \leqslant ka \max_{\bar{\Omega}} w_j.$$

于是

$$\begin{aligned} d_{2j} \max_{\bar{\Omega}} v_j \leqslant \max_{\bar{\Omega}} \varphi_j &= \varphi_j(x_0) = d_{2j} v_j(x_0) + \frac{d_{4j} v_j(x_0)}{\sigma + w_j^2(x_0)} \\ &\leqslant v_j(x_0) \left(d_{2j} + \frac{d^*}{\sigma} \right) \leqslant ka \max_{\bar{\Omega}} w_j \left(d_{2j} + \frac{d^*}{\sigma} \right), \end{aligned}$$

故有

$$\max_{\bar{\Omega}} v_j \leqslant ka \left(1 + \frac{d^*}{\sigma d} \right) \max_{\bar{\Omega}} w_j. \tag{6.3.7}$$

从式 (6.3.5) ~ (6.3.7) 推出

$$\lim_{j \to \infty} \max_{\bar{\Omega}} v_j = \lim_{j \to \infty} \max_{\bar{\Omega}} w_j = \infty.$$

利用式 (6.3.6) 和式 (6.3.7) 又知, 存在正常数 A 和 B 使得

$$A \|v_j\|_\infty \leqslant \|w_j\|_\infty \leqslant B \|v_j\|_\infty. \tag{6.3.8}$$

由于 $u_j, v_j, w_j \geqslant 0$, 故 u_j 满足

$$\begin{cases} -d_{1j} \Delta u_j \leqslant a u_j, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases}$$

用 u_j 乘以方程再积分得

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{a}{d_{1j}} \int_\Omega u_j^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{d} a^3 |\Omega|,$$

这说明$\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的有界列. 取子列可知, 存在 $u\in L^2(\Omega)$, 使得在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_j\longrightarrow u$. 又因为 $0\leqslant u_j\leqslant a$, 所以 $0\leqslant u\leqslant a$. 对于任何 $p>\max\{n,2\}$, 我们有

$$\int_\Omega|u_j-u|^p\mathrm{d}x=\int_\Omega|u_j-u|^2|u_j-u|^{p-2}\mathrm{d}x\leqslant a^{p-2}\int_\Omega|u_j-u|^2\mathrm{d}x\longrightarrow 0,$$

即在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_j\longrightarrow u$.

令

$$\hat v_j=\frac{v_j}{\|v_j\|_\infty},\quad \hat w_j=\frac{w_j}{\|w_j\|_\infty},$$

则 $(u_j,\hat v_j,\hat w_j)$ 满足

$$\begin{cases}-d_{1j}\Delta u_j=u_j\left[a-u_j-\varepsilon\|v_j\|_\infty\hat v_j-\|w_j\|_\infty\hat w_j\right], & x\in\Omega,\\ -\Delta\left(\hat v_j+\dfrac{d_{4j}\hat v_j}{d_{2j}(\sigma+\|w_j\|_\infty^2\hat w_j^2)}\right)=\dfrac{1}{d_{2j}}\left(ku_j\dfrac{\|w_j\|_\infty}{\|v_j\|_\infty}\hat w_j-\hat v_j\right), & x\in\Omega,\\ -\Delta\hat w_j=\dfrac{1}{d_{3j}}\left(b\dfrac{\|v_j\|_\infty}{\|w_j\|_\infty}\hat v_j-m\hat w_j\right), & x\in\Omega,\\ \|\hat v_j\|_\infty=\|\hat w_j\|_\infty=1,\quad \dfrac{\partial u_j}{\partial\nu}=\dfrac{\partial\hat v_j}{\partial\nu}=\dfrac{\partial\hat w_j}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{6.3.9}$$

因为 $0\leqslant\hat v_j\leqslant 1$, 所以对任何 $p>n$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $\{\hat v_j\}_{j=1}^\infty$ 有弱收敛的子序列. 根据估计式 (6.3.8) 以及 $0\leqslant u_j\leqslant a$ 和 $0\leqslant\hat v_j,\ \hat w_j\leqslant 1$ 知, 问题 (6.3.9) 中的后两个方程的右端有界. 依次利用椭圆型方程的 L^p 理论和 Schauder 理论又知, 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中 $\{\hat\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ 和 $\{\hat w_j\}_{j=1}^\infty$ 都有弱收敛的子列, 在 $C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$ 中 $\{\hat\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ 和 $\{\hat w_j\}_{j=1}^\infty$ 都有强收敛的子列, 其中

$$\hat\varphi_j=\hat v_j+\frac{d_{4j}\hat v_j}{d_{2j}(\sigma+\|w_j\|_\infty^2\hat w_j^2)}.$$

根据上面的分析, 通过选取子序列, 不妨假设存在正常数 θ, 使得 $\|v_j\|_\infty/\|w_j\|_\infty\longrightarrow\theta$, 并且

$$d_{ij}\longrightarrow d_i,\quad d_1,d_2,d_3\geqslant d,\ \ 0\leqslant d_4\leqslant d^*,$$

$$\text{在 } L^p(\Omega) \text{ 中},\ u_j\longrightarrow u\geqslant 0,\ \hat v_j\rightharpoonup\hat v\geqslant 0,$$

$$\text{在 } C^{1+\alpha}(\bar\Omega) \text{ 中},\ \hat\varphi_j\longrightarrow\hat\varphi\geqslant 0,\ \hat w_j\longrightarrow\hat w\geqslant 0,\ \ \text{并且 } \|\hat w\|_\infty=1$$

$$\text{在 } W^{2,p}(\Omega) \text{ 中},\ \hat\varphi_j\rightharpoonup\hat\varphi,\ \hat w_j\rightharpoonup\hat w.$$

如果 $d_3=\infty$, 则 $\hat w$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta \hat{w} = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \|\hat{w}\|_\infty = 1. \end{cases}$$

由此推出 $\hat{w} = 1$. 如果 $d_3 < \infty$, 则 $\hat{w}$ 满足 $\|\hat{w}\|_\infty = 1$ 及

$$\begin{cases} -d_3 \Delta \hat{w} = b\theta\hat{v} - m\hat{w}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

根据 $W^{2,n}(\Omega)$ 解的强最大值原理 (定理 B.1.9) 和 Hopf 引理 (定理 B.1.11), $\hat{w} > 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 这说明无论 $d_3 = \infty$ 还是 $d_3 < \infty$, 都有 $\hat{w}(x) > 0, x \in \bar{\Omega}$. 于是存在正常数 δ, 使得 $\hat{w} \geqslant \delta$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 从而对于所有的 j, 在 $\bar{\Omega}$ 上 $\hat{w}_j \geqslant \delta/2$. 因为当 $j \longrightarrow \infty$ 时, $\|w_j\|_\infty \longrightarrow \infty$, 从问题 (6.3.9) 中 u_j 的方程知, 当 j 适当大时

$$\begin{cases} -d_{1j}\Delta u_j = u_j\big[a - u_j - \varepsilon\|v_j\|_\infty \hat{v}_j - \|w_j\|_\infty \hat{w}_j\big] \\ \qquad\qquad \leqslant u_j\big[a - (\delta/2)\|w_j\|_\infty\big] < 0, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由于 $\displaystyle\int_\Omega \Delta u_j \mathrm{d}x = 0$, 故上式是一个矛盾.

现在证明估计式 (6.3.3). 注意到式 (6.3.4), 由椭圆型方程的正则性结论知

$$u,\ w,\ v\left[d_2 + d_4/(\sigma + w^2)\right] \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}),$$

并且它们的 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 范数只依赖于参数 d, d^* 和 $a, b, k, m, \varepsilon, \sigma$. 由此可以推出 $v \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 并且范数 $|v|_{1+\alpha}$ 也只依赖于参数 d, d^* 和 $a, b, k, m, \varepsilon, \sigma$. 再次利用椭圆型方程的正则性结论就可以推出估计式 (6.3.3). 证毕.

下面, 我们给出正解的正的下界估计. 为此我们先给出一个引理, 其证明同于引理 6.2.1.

引理 6.3.1 假设 $d_{ij} \in (0, \infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, (u_j, v_j, w_j) 是问题 (6.3.1) 对应于 $d_i = d_{ij}$ 的正解. 又设 $d_{ij} \longrightarrow d_i \in [0, \infty]$,

$$(u_j, v_j, w_j) \longrightarrow (u^*, v^*, w^*)$$

在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立. 如果 u^*, v^* 和 w^* 都是常数, 则 (u^*, v^*, w^*) 一定满足

$$a - u^* - \varepsilon v^* - w^* = 0, \quad ku^*w^* - v^* = 0, \quad bv^* - mw^* = 0.$$

特别地, 如果 u^*, v^* 和 w^* 都是正常数, 则 $(u^*, v^*, w^*) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 是问题 (6.3.1) 的正常数解.

定理 6.3.2　设 d 和 d^* 是两个固定的正常数. 则存在正常数 $C(d,d^*)$, 当 $d_1,d_2,d_3\geqslant d$ 以及 $0\leqslant d_4\leqslant d^*$ 时, 问题 (6.3.1) 的每一个正解 (u,v,w) 都有估计:

$$\min_{\bar\Omega} u,\ \min_{\bar\Omega} v,\ \min_{\bar\Omega} w\geqslant \frac{1}{C(d,d^*)}.$$

证明　假设定理的结论不对, 则存在满足 $d_{1j},d_{2j},d_{3j}\geqslant d$ 和 $0\leqslant d_{4j}\leqslant d^*$ 的序列 $\left\{(d_{1j},d_{2j},d_{3j},d_{4j})\right\}_{j=1}^{\infty}$, 以及问题 (6.3.1) 对应于 $(d_1,d_2,d_3,d_4)=(d_{1j},d_{2j},d_{3j},d_{4j})$ 的正解 (u_j,v_j,w_j), 使得

$$\min\left\{\min_{\bar\Omega} u_j,\ \min_{\bar\Omega} v_j,\ \min_{\bar\Omega} w_j\right\}\longrightarrow 0.$$

由于 $d_{1j},d_{2j},d_{3j}\geqslant d$, 通过选取子序列不妨假设 $d_{ij}\longrightarrow d_i\in[d,\infty]$, $i=1,2,3$, 并且 $d_{4j}\longrightarrow d_4\in[0,d^*]$. 由式 (6.3.3), 我们还可以假设在 $[C^{2+\alpha}(\bar\Omega)]^3$ 中 $(u_j,v_j,w_j)\longrightarrow(u,v,w)$, 其中 u,v 和 w 都是非负函数. 容易看出 (u,v,w) 也满足估计式 (6.3.3), 并且

$$\min_{\bar\Omega} u=0,\quad\text{或者}\quad\min_{\bar\Omega} v=0,\quad\text{或者}\quad\min_{\bar\Omega} w=0.$$

同时 (u,v,w) 还有下面的性质:

(a) 如果 $d_1,d_2,d_3<\infty$, 则 (u,v,w) 满足问题 (6.3.1);

(b) 如果 $d_1=\infty$, 因为 (u_j,v_j,w_j) 满足估计式 (6.3.4), 所以

$$\begin{cases}-\Delta u=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

由此知 u 是常数. 对于 d_2 和 d_3, 类似的结论成立.

下面, 我们分别对于每一种情况来导出矛盾.

第一步　先考虑 $d_1,d_2,d_3<\infty$ 的情况.

注意到估计式 (6.3.4), 运用 Harnack 不等式于 u 的方程知: $\min_{\bar\Omega} u=0$ 蕴含 $u=0$. 从 v 和 w 的方程又推出 $v=w=0$. 故 $(u_j,v_j,w_j)\longrightarrow(0,0,0)$ 在 $\bar\Omega$ 上一致成立. 此与引理 6.3.1 矛盾. 所以 $\min_{\bar\Omega} u>0$.

现在证明 $\min_{\bar\Omega} v=\min_{\bar\Omega} w=0$. 由假设条件知它们中至少有一个为零. 如果 $\min_{\bar\Omega} w=0$, 记 $w(x_0)=\min_{\bar\Omega} w$. 由最大值原理, $bv(x_0)\leqslant mw(x_0)=0$, 进而有 $\min_{\bar\Omega} v=0$. 因此 $\min_{\bar\Omega} v=0$ 总成立. 令 $v(x_1)=\min_{\bar\Omega} v$, 那么

$$v(x_1)[d_2+d_4/(\sigma+w^2(x_1))]=0=\min_{\bar\Omega}\left\{v[d_2+d_4/(\sigma+w^2)]\right\}.$$

利用最大值原理于问题 (6.3.1) 中的第二个方程得 $ku(x_1)w(x_1)\leqslant v(x_1)=0$. 因为 $u(x_1)>0$, 所以 $w(x_1)=0$, 从而 $\min_{\bar\Omega} w=0$. 总之 $\min_{\bar\Omega} v=\min_{\bar\Omega} w=0$, 即 $\lim\limits_{j\to\infty}\min\limits_{\bar\Omega} v_j=\lim\limits_{j\to\infty}\min\limits_{\bar\Omega} w_j=0$.

定义

$$\hat{v}_j = \frac{v_j}{\|v_j\|_\infty + \|w_j\|_\infty}, \quad \hat{w}_j = \frac{w_j}{\|v_j\|_\infty + \|w_j\|_\infty}, \tag{6.3.10}$$

则 $(u_j, \hat{v}_j, \hat{w}_j, w_j)$ 满足

$$\begin{cases} -d_{1j}\Delta u_j = u_j(a - u_j - \varepsilon v_j - w_j), & x \in \Omega, \\ -\Delta\left(d_{2j}\hat{v}_j + \dfrac{d_{4j}\hat{v}_j}{\sigma + w_j^2}\right) = ku_j\hat{w}_j - \hat{v}_j, & x \in \Omega, \\ -d_{3j}\Delta\hat{w}_j = b\hat{v}_j - m\hat{w}_j, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{v}_j}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{w}_j}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

同上, 存在 $\{(\hat{v}_j, \hat{w}_j)\}_{j=1}^\infty$ 的一个子序列 (仍然记成它自身) 和非负函数 $\hat{v}$, $\hat{w}$, 使得在 $[C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})]^2$ 中 $(\hat{v}_j, \hat{w}_j) \longrightarrow (\hat{v}, \hat{w})$, 并且 $\|\hat{v}\|_\infty + \|\hat{w}\|_\infty = 1$. 此外, 如果 $\|v_j\|_\infty + \|w_j\|_\infty \geqslant \delta > 0$, 则 $(u, \hat{v}, \hat{w}, w)$ 满足 $\min_{\bar{\Omega}} \hat{v} = \min_{\bar{\Omega}} \hat{w} = 0$ 及

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = u(a - u - \varepsilon v - w), & x \in \Omega, \\ -\Delta\left(d_2\hat{v} + \dfrac{d_4\hat{v}}{\sigma + w^2}\right) = ku\hat{w} - \hat{v}, & x \in \Omega, \\ -d_3\Delta\hat{w} = b\hat{v} - m\hat{w}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.11}$$

如果 $\lim\limits_{j\to\infty} \left(\|v_j\|_\infty + \|w_j\|_\infty\right) = 0$, 则 $v = w = 0$ 并且 $(u, \hat{v}, \hat{w})$ 满足

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = u(a - u), & x \in \Omega, \\ -(d_2 + d_4/\sigma)\Delta\hat{v} = ku\hat{w} - \hat{v}, & x \in \Omega, \\ -d_3\Delta\hat{w} = b\hat{v} - m\hat{w}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.12}$$

对于问题 (6.3.11), 把 $\hat{w}$ 的方程写成

$$\begin{cases} -d_3\Delta\hat{w} + m\hat{w} = b\hat{v} \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由于 $\min_{\bar{\Omega}} \hat{w} = 0$, 利用强极值原理和 Hopf 引理可推出 $\hat{w} = 0$, 进而得到 $\hat{v} = 0$. 此与 $\|\hat{v}\|_\infty + \|\hat{w}\|_\infty = 1$ 的事实矛盾.

对于问题 (6.3.12), 由于 $u>0$, 从 u 的方程推知 $u=a$. 于是 $(\hat{v},\hat{w})$ 满足

$$\begin{cases} -(d_2+d_4/\sigma)\Delta\hat{v}=ka\hat{w}-\hat{v}, & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta\hat{w}=b\hat{v}-m\hat{w}, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\hat{v}}{\partial\nu}=\dfrac{\partial\hat{w}}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.13}$$

因为参数 a,b,k,m 是正的, $\hat{v}$ 和 $\hat{w}$ 是非负的, 并且满足 $\|\hat{v}\|_\infty+\|\hat{w}\|_\infty=1$, 利用最大值原理和 Hopf 引理知 $\hat{v}$ 和 $\hat{w}$ 都是正函数. 设 $x_i,y_i\in\bar{\Omega}$, 使得

$$\hat{v}(x_1)=\min_{\bar{\Omega}}\hat{v},\quad \hat{v}(y_1)=\max_{\bar{\Omega}}\hat{v},\quad \hat{w}(x_2)=\min_{\bar{\Omega}}\hat{w},\quad \hat{w}(y_2)=\max_{\bar{\Omega}}\hat{w}.$$

应用最大值原理于问题 (6.3.13), 我们有

$$\hat{v}(x_1)\geqslant ka\hat{w}(x_1)\geqslant ka\hat{w}(x_2),\quad \hat{v}(y_1)\leqslant ka\hat{w}(y_1)\leqslant ka\hat{w}(y_2),$$
$$m\hat{w}(x_2)\geqslant b\hat{v}(x_2)\geqslant b\hat{v}(x_1),\quad m\hat{w}(y_2)\leqslant b\hat{v}(y_2)\leqslant b\hat{v}(y_1).$$

注意到 $\hat{v}(x_1)>0$, 从上面的不等式容易推出 $m=abk$, 此与 $m<abk$ 矛盾.

第二步 考虑其他情况.

因为 (u_j,v_j,w_j) 满足

$$\int_\Omega v_j\mathrm{d}x=k\int_\Omega u_jw_j\mathrm{d}x,\quad m\int_\Omega w_j\mathrm{d}x=b\int_\Omega v_j\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_\Omega v\mathrm{d}x=k\int_\Omega uw\mathrm{d}x,\quad m\int_\Omega w\mathrm{d}x=b\int_\Omega v\mathrm{d}x. \tag{6.3.14}$$

(1) 若 $d_1=\infty$, 则 $u=u^*$ 是常数. 如果 $u^*=0$, 从式 (6.3.14) 中的第一个方程推知 $v=0$. 再由式 (6.3.14) 中的第二个方程知 $w=0$, 即 $(u_j,v_j,w_j)\longrightarrow(0,0,0)$. 此与引理 6.3.1 矛盾. 因而 $u^*>0$ 一定成立.

(1a) 若 $d_2,d_3<\infty$, 因为 $\min_{\bar{\Omega}}v$ 和 $\min_{\bar{\Omega}}w$ 中至少有一个是零, 同于第一步可得 $\min_{\bar{\Omega}}v=\min_{\bar{\Omega}}w=0$. 注意到由式 (6.3.10) 定义的函数 $\hat{v}_j,\hat{w}_j$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta\left(d_{2j}\hat{v}_j+\dfrac{d_{4j}\hat{v}_j}{\sigma+w_j^2}\right)=ku_j\hat{w}_j-\hat{v}_j, & x\in\Omega,\\ -d_{3j}\Delta\hat{w}_j=b\hat{v}_j-m\hat{w}_j, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\hat{v}_j}{\partial\nu}=\dfrac{\partial\hat{w}_j}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.15}$$

同上, 不妨假设在空间 $[C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})]^2$ 中 $(\hat{v}_j,\hat{w}_j)\longrightarrow(\hat{v},\hat{w})$, 其中 $\hat{v}$ 和 $\hat{w}$ 都是非负函数, 并且满足 $\|\hat{v}\|_\infty+\|\hat{w}\|_\infty=1$.

如果 $\|v_j\|_\infty + \|w_j\|_\infty \geqslant \delta > 0$, 则 $(\hat{v}, \hat{w})$ 满足 $\min_{\bar{\Omega}} \hat{v} = \min_{\bar{\Omega}} \hat{w} = 0$ 和

$$\begin{cases} -\Delta\left(d_2\hat{v} + \dfrac{d_4\hat{v}}{\sigma + w^2}\right) = ku^*\hat{w} - \hat{v}, & x \in \Omega, \\ -d_3\Delta\hat{w} = b\hat{v} - m\hat{w}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

同于对问题 (6.3.11) 的讨论我们可以导出一个矛盾. 如果 $\lim\limits_{j\to\infty}\left(\|v_j\|_\infty + \|w_j\|_\infty\right) = 0$, 则 $v = w = 0$ 并且 $(\hat{v}, \hat{w})$ 满足

$$\begin{cases} -(d_2 + d_4/\sigma)\Delta\hat{v} = ku^*\hat{w} - \hat{v}, & x \in \Omega, \\ -d_3\Delta\hat{w} = b\hat{v} - m\hat{w}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.16}$$

注意到 $(u, v, w) = (u^*, 0, 0)$, 由引理 6.3.1 知 $u^* = a$. 这样问题 (6.3.16) 实际上就是问题 (6.3.13). 同于第一步的讨论我们有 $m = abk$. 矛盾.

(1b) 如果 $d_2 = \infty$, 则 $v = v^*$ 是非负常数.

当 $d_3 = \infty$ 时, $w = w^*$ 也是一个非负常数.

当 $d_3 < \infty$ 时, 因为 w 满足

$$\begin{cases} -d_3\Delta w = bv^* - mw, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

所以 $w = bv^*/m$ 是非负常数. 注意到 $\min_{\bar{\Omega}} v = 0$ 或者 $\min_{\bar{\Omega}} w = 0$, 故有 $v = w = 0$. 利用引理 6.3.1 知 $u^* = a$, 从而 $(u_j, v_j, w_j) \longrightarrow (a, 0, 0)$. 由于 $(u_j, \hat{v}_j, \hat{w}_j, w_j)$ 满足 (6.3.15) 并且 $d_{2j} \longrightarrow \infty$, 同上可推出 $\hat{v}_j \longrightarrow \hat{v} = v_0$ 是常数, 并且无论 $d_3 < \infty$ 还是 $d_3 = \infty$, 都有 $\hat{w}_j \longrightarrow \hat{w} = w_0$ 也是常数. 根据式 (6.3.15), 我们还有

$$k\int_\Omega u_j\hat{w}_j \mathrm{d}x = \int_\Omega \hat{v}_j \mathrm{d}x, \quad b\int_\Omega \hat{v}_j \mathrm{d}x = m\int_\Omega \hat{w}_j \mathrm{d}x.$$

由于 $u_j \longrightarrow a$, 故有 $kaw_0 = v_0, bv_0 = mw_0$. 由此知 v_0 和 w_0 都是正的 (因为 $v_0 + w_0 = 1$) 并且 $m = abk$ 成立. 此与 $m < abk$ 矛盾.

(1c) 如果 $d_3 = \infty$, 同理可以导出矛盾.

(2) 如果 $d_1 < \infty$, 则 $u > 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上成立. 事实上, 如果 $\min_{\bar{\Omega}} u = 0$, 由 Harnack 不等式知 $u = 0$. 再由式 (6.3.14) 可推出 $v = w = 0$. 此与引理 6.3.1 矛盾.

(2a) 如果 $d_2 = \infty$, 同于情形 (1b) 的讨论容易推出 $v = w = 0$. 于是由 u 的方程知 $u = a$. 同于情形 (1b) 的讨论, 可以得到矛盾.

(2b) 如果 $d_3=\infty$, 与上类似可以推出矛盾.

定理得证.

6.3.2 非常数正解的不存在性

本小节我们将证明: 如果 $d_4=0$, 则当 d_1 很大时问题 (6.3.1) 没有非常数正解. 当 $d_4=0$ 时, 问题 (6.3.1) 成为

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = au-u^2-\varepsilon uv-uw, & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta v = kuw-v, & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta w = bv-mw, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.17}$$

定理 6.3.3 设 d_2,d_3,a,b,k,m 和 ε 是固定的正常数, $m<abk$. 则存在正常数 $\hat{d}_1$, 当 $d_1\geqslant\hat{d}_1$ 时问题 (6.3.17) 没有非常数正解.

为证此定理, 我们先证明下面的引理.

引理 6.3.2 设 (u,v,w) 问题 (6.3.17) 的正解. 那么在 $[C^2(\bar{\Omega})]^3$ 中

$$\lim_{d_1\to\infty}(u,v,w)=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}),$$

其中 $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ 由式 (6.3.2) 给出.

证明 对于满足 $d_{1j}\longrightarrow\infty$ 的子序列 $\{d_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$, 记 (u_j,v_j,w_j) 是问题 (6.3.17) 对应的解. 利用估计式 (6.3.3), 不妨假设在 $[C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})]^3$ 中 $(u_j,v_j,w_j)\longrightarrow(u,v,w)$. 显然 $u=u^*$ 是非负常数, (v,w) 满足

$$\begin{cases} -d_2\Delta v = ku^*w-v, & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta w = bv-mw, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.18}$$

如果 $u^*=0$, 则 $v=w=0$, 因而 $(u_j,v_j,w_j)\longrightarrow(0,0,0)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立. 此与引理 6.3.1 矛盾, 故 $u^*>0$. 容易看出, $w=0$ 当且仅当 $v=0$. 如果 $w=0$, 类似于定理 6.3.2 的证明过程中的情形 (1a) 可以导出矛盾. 因此 $\max_{\bar{\Omega}}w>0$, $\max_{\bar{\Omega}}v>0$. 从问题 (6.3.18) 又推出

$$\begin{cases} -\Delta(bd_2v+d_3w)=(bku^*-m)w, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial(bd_2v+d_3w)}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{6.3.19}$$

于是有

$$(bku^* - m)\int_\Omega w\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $\max_{\bar\Omega} w > 0$, 故 $u^* = m/(bk) = \tilde{u}$, 从而问题 (6.3.19) 的第一式的右端等于 0, 进而推出 $bd_2v + d_3w = c$ 是一个正常数. 再利用问题 (6.3.18) 的后两式又得

$$\begin{cases} -d_3\Delta w = \dfrac{c}{d_2} - \left(m + \dfrac{d_3}{d_2}\right) w, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由此推出 w 是正常数, 进而得到 v 也是正常数. 利用引理 6.3.1 得 $v = \tilde{v}$, $w = \tilde{w}$. 这说明当 $d_1 \longrightarrow \infty$ 时, $(u, v, w) \longrightarrow (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$. 引理得证.

定理 6.3.3 的证明 定义

$$X = \left\{ u \in C^\alpha(\bar\Omega) : \int_\Omega u\mathrm{d}x = 0 \right\},$$

$$Y = \left\{ u \in C^{2+\alpha}(\bar\Omega) : \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$Z = X \cap Y.$$

记 $\rho = d_1^{-1}$, 并分解 $u = h + z$, 其中 $h \in \mathbb{R}$, $z \in Z$. 再定义

$$f_1(\rho, h, z, v, w) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (h+z)(a - h - z - \varepsilon v - w)\mathrm{d}x,$$

$$f_2(\rho, h, z, v, w) = \Delta z + \rho(h+z)(a - h - z - \varepsilon v - w) - \rho f_1(\rho, h, z, v, w),$$

$$f_3(\rho, h, z, v, w) = d_2\Delta v - v + k(h+z)w,$$

$$f_4(\rho, h, z, v, w) = d_3\Delta w - mw + bv,$$

$$F(\rho, h, z, v, w) = (f_1, f_2, f_3, f_4)^{\mathrm{T}}(\rho, h, z, v, w).$$

那么

$$F : \mathbb{R}^2 \times Z \times Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \times X \times [C^\alpha(\bar\Omega)]^2,$$

并且对任给的 $\rho > 0$, (u, v, w) 是问题 (6.3.17) 的解当且仅当 $F(\rho, h, z, v, w) = 0$. 容易看出对所有的 ρ, 等式 $F(\rho, \tilde{u}, 0, \tilde{v}, \tilde{w}) = 0$ 成立.

设 Ψ 是 F 在 $(0, \tilde{u}, 0, \tilde{v}, \tilde{w})$ 处关于变元 (h, z, v, w) 的 Fréchet 导数, 直接计算知

$$\Psi(h,z,v,w)=\begin{pmatrix} -\dfrac{\tilde{u}}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega(h+z+\varepsilon v+w)\mathrm{d}x \\ \Delta z \\ d_2\Delta v-v+k\tilde{w}(h+z)+k\tilde{u}w \\ d_3\Delta w-mw+bv \end{pmatrix}. \tag{6.3.20}$$

我们将证明 Ψ 是满单射, 即证明对任给的

$$(h_0,z_0,v_0,w_0)\in\mathbb{R}\times X\times[C^\alpha(\bar{\Omega})]^2,$$

方程

$$\Psi(h,z,v,w)=(h_0,z_0,v_0,w_0)$$

有唯一解 $(h,z,v,w)\in\mathbb{R}\times Z\times Y\times Y$, 或者等价地说下面的问题

$$\int_\Omega(h+z+\varepsilon v+w)\mathrm{d}x=-\frac{h_0|\Omega|}{\tilde{u}}, \tag{6.3.21}$$

$$\Delta z=z_0,\quad x\in\Omega;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad \int_\Omega z\mathrm{d}x=0, \tag{6.3.22}$$

$$\left.\begin{aligned} &d_2\Delta v-v+k\tilde{w}(h+z)+\frac{m}{b}w=v_0, && x\in\Omega,\\ &d_3\Delta w-mw+bv=w_0, && x\in\Omega,\\ &\frac{\partial v}{\partial\nu}=\frac{\partial w}{\partial\nu}=0, && x\in\partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{6.3.23}$$

有唯一解.

事实上, 由于 $z_0\in X$, 故问题 (6.3.22) 有唯一解 $z\in Z$ (定理 2.7.2). 于是由式 (6.3.23) 得

$$\begin{cases} \Delta(bd_2v+d_3w)+bk\tilde{w}(h+z)=bv_0+w_0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial(bd_2v+d_3w)}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.3.24}$$

因为 $\int_\Omega z(x)\mathrm{d}x=0$, 由定理 2.7.2 知, 问题 (6.3.24) 有唯一解当且仅当 h 满足

$$bk\tilde{w}h|\Omega|=\int_\Omega(bv_0+w_0)\mathrm{d}x. \tag{6.3.25}$$

显然这个 h 是唯一确定的. 对于这个 h, 问题 (6.3.24) 有形如 $bd_2v+d_3w=g(x)+\lambda$ 的解, 其中 λ 是一个待定的自由常数, 函数 $g(x)$ 满足 $\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x=0$ 被唯一确定.

此时问题 (6.3.23) 中 w 的方程成为

$$\begin{cases} d_3\Delta w - \left(m + \dfrac{d_3}{d_2}\right)w + \dfrac{g+\lambda}{d_2} = w_0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

对于给定的 λ, 该问题有唯一解 $w = w_\lambda(x)$, 并且满足

$$\int_\Omega w_0 \mathrm{d}x + \left(m + \frac{d_3}{d_2}\right)\int_\Omega w \mathrm{d}x = \frac{1}{d_2}\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{d_2}|\Omega| = \frac{\lambda}{d_2}|\Omega|. \tag{6.3.26}$$

利用

$$\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x = 0, \quad bd_2 v + d_3 w = g(x) + \lambda,$$

以及式 (6.3.26), 我们有

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\varepsilon v + w)\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(\varepsilon \frac{g(x)+\lambda - d_3 w}{bd_2} + w\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda\varepsilon}{bd_2}|\Omega| + \left(1 - \frac{\varepsilon d_3}{bd_2}\right)\int_\Omega w \mathrm{d}x \\ &= \lambda\frac{(b+m\varepsilon)|\Omega|}{b(md_2+d_3)} - \frac{d_2}{md_2+d_3}\left(1 - \frac{\varepsilon d_3}{bd_2}\right)\int_\Omega w_0 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

把此式代入式 (6.3.21), 再利用式 (6.3.25) 可看出, λ 由下面的关系式唯一确定:

$$-\frac{h_0|\Omega|}{\tilde{u}} - \frac{1}{bk\tilde{w}}\int_\Omega (bv_0 + w_0) = \lambda\frac{(b+m\varepsilon)|\Omega|}{b(md_2+d_3)} - \frac{d_2}{md_2+d_3}\left(1 - \frac{\varepsilon d_3}{bd_2}\right)\int_\Omega w_0 \mathrm{d}x.$$

因此 $w = w_\lambda(x)$ 被唯一确定, 从而 v 也被唯一确定. 上面的讨论说明, 对任给的 $(h_0, z_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R} \times X \times [C^\alpha(\bar{\Omega})]^2$, 方程 $\Psi(h,z,v,w) = (h_0, z_0, v_0, w_0)$ 有唯一解. 这样就证明了 Ψ 满单射, 因此 Ψ^{-1} 存在并且是有界线性算子.

根据隐函数定理, 存在常数 $\delta > 0$, 对所有 $0 < \rho < \delta$, 在 $(\tilde{u}, 0, \tilde{v}, \tilde{w})$ 的邻域内方程 $F(\rho, h, z, v, w) = 0$ 有唯一解, 这个解就是 $(\tilde{u}, 0, \tilde{v}, \tilde{w})$. 因此当 d_1 很大时, 在 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 的邻域内问题 (6.3.17) 只有常数解 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$. 该事实结合引理 6.3.2 就推出定理的结论. 证毕.

6.3.3 非常数正解的存在性

本小节我们讨论问题 (6.3.1) 的非常数正解的存在性. 这些解是由于交错扩散系数 d_4 很大, 或者扩散系数 d_1 很大而产生的.

我们先讨论问题 (6.3.1) 在 $\widetilde{U}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ 处的线性化问题. 记

$$\Phi(U)=(d_1u,\, d_2v+d_4v/(\sigma+w^2),\, d_3w)^{\mathrm{T}},$$

$$G(U)=\begin{pmatrix} G_1(U)\\ G_2(U)\\ G_3(U)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(a-u-\varepsilon v-w)\\ kuw-v\\ bv-mw\end{pmatrix},$$

那么问题 (6.3.1) 可以写成

$$\begin{cases} -\Delta\Phi(U)=G(U), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial U}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

采用 6.1 节的记号, 为了计算指数 $\mathrm{index}\,(I-\mathcal{F}(\cdot),\widetilde{U})$, 需要确定使得 $\det\{\mu_i\Phi_U(\tilde{U})-G_U(\tilde{U})\}<0$ 的那些 μ_i 的代数重数之和. 为此我们先讨论多项式 $\det\{\mu\Phi_U(\tilde{U})-G_U(\widetilde{U})\}$. 因为要讨论的是扩散系数 d_1 和交错扩散系数 d_4 变化时非常数正解的存在性, 我们将着重强调 $\det\{\mu\Phi_U(\tilde{U})-G_U(\widetilde{U})\}$ 关于 d_1 和 d_4 的变化情况. 直接计算知

$$\begin{aligned}\det\{\mu\Phi_U(\widetilde{U})-G_U(\widetilde{U})\}&=C_3\mu^3+C_2\mu^2+C_1\mu+k(b+m\varepsilon)\tilde{u}\tilde{w}\\ &:=\mathcal{C}(d_1,d_4;\mu),\end{aligned}\tag{6.3.27}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_3&=d_1d_3\Big(d_2+\frac{d_4}{\sigma+\tilde{w}^2}\Big),\\
C_2&=(md_1+d_3\tilde{u})\Big(d_2+\frac{d_4}{\sigma+\tilde{w}^2}\Big)+d_1d_3-bd_1\frac{2d_4\tilde{v}\tilde{w}}{(\sigma+\tilde{w}^2)^2},\\
C_1&=m\tilde{u}\Big(d_2+\frac{d_4}{\sigma+\tilde{w}^2}\Big)+d_3\tilde{u}-b\tilde{u}\frac{2d_4\tilde{v}\tilde{w}}{(\sigma+\tilde{w}^2)^2}+\varepsilon kd_3\tilde{u}\tilde{w}.
\end{aligned}$$

我们先考虑 $\mathcal{C}(d_1,d_4;\mu)$ 关于 d_4 的变化情况. 设 $\tilde{\mu}_1(d_4)$, $\tilde{\mu}_2(d_4)$ 和 $\tilde{\mu}_3(d_4)$ 是方程 $\mathcal{C}(d_1,d_4;\mu)=0$ 的三个根, 满足 $\mathrm{Re}\,\tilde{\mu}_1(d_4)\leqslant\mathrm{Re}\,\tilde{\mu}_2(d_4)\leqslant\mathrm{Re}\,\tilde{\mu}_3(d_4)$. 那么 $\tilde{\mu}_1(d_4)\tilde{\mu}_2(d_4)\tilde{\mu}_3(d_4)<0$, $\tilde{\mu}_1(d_4)$, $\tilde{\mu}_2(d_4)$ 和 $\tilde{\mu}_3(d_4)$ 中至少有一个是负实数, 另外两个的乘积是正的.

同于 6.2.4 节, 我们考虑下面的极限:

$$\begin{aligned}
\lim_{d_4\to\infty}\frac{C_3}{d_4}&=\frac{d_1d_3}{\sigma+\tilde{w}^2}:=a_3(\sigma),\\
\lim_{d_4\to\infty}\frac{C_2}{d_4}&=\frac{1}{\sigma+\tilde{w}^2}\Big(md_1+d_3\tilde{u}-2bd_1\frac{\tilde{v}\tilde{w}}{\sigma+\tilde{w}^2}\Big):=a_2(\sigma),\\
\lim_{d_4\to\infty}\frac{C_1}{d_4}&=\frac{\tilde{u}[m(\sigma+\tilde{w}^2)-2b\tilde{v}\tilde{w}]}{(\sigma+\tilde{w}^2)^2}=\frac{m\tilde{u}(\sigma-\tilde{w}^2)}{(\sigma+\tilde{w}^2)^2}:=a_1(\sigma).
\end{aligned}$$

于是当 $\sigma < \tilde{w}^2$ 时, $a_1(\sigma) < 0$. 下面我们只考虑 $0 < \sigma < \tilde{w}^2$ 的情况. 这样就有 $a_1(\sigma) < 0$, 并且对于所有充分大的 d_4, 有 $C_1 < 0$. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{d_4\to\infty}\frac{\mathcal{C}(d_1,d_4;\mu)}{d_4} &= a_3(\sigma)\mu^3 + a_2(\sigma)\mu^2 + a_1(\sigma)\mu\\ &= \mu[a_3(\sigma)\mu^2 + a_2(\sigma)\mu + a_1(\sigma)],\end{aligned}$$

并且 $a_1(\sigma) < 0 < a_3(\sigma)$, 利用连续性知当 d_4 很大时, $\tilde{\mu}_1(d_4)$ 是负实数. 由于 $\tilde{\mu}_2(d_4)\tilde{\mu}_3(d_4) > 0$, 进而推出 $\tilde{\mu}_2(d_4)$ 和 $\tilde{\mu}_3(d_4)$ 都是正实数, 并且

$$\lim_{d_4\to\infty}\tilde{\mu}_1(d_4) = \frac{-a_2(\sigma) - \sqrt{a_2^2(\sigma) - 4a_1(\sigma)a_3(\sigma)}}{2a_3(\sigma)} < 0, \quad \lim_{d_4\to\infty}\tilde{\mu}_2(d_4) = 0, \tag{6.3.28}$$

$$\lim_{d_4\to\infty}\tilde{\mu}_3(d_4) = \frac{-a_2(\sigma) + \sqrt{a_2^2(\sigma) - 4a_1(\sigma)a_3(\sigma)}}{2a_3(\sigma)} := \tilde{\mu} > 0. \tag{6.3.29}$$

这样就得到

命题 6.3.1 假设 $0 < \sigma < \tilde{w}^2$, 则存在正常数 d_4^*, 使得当 $d_4 \geqslant d_4^*$ 时, 代数方程 $\mathcal{C}(d_1,d_4;\mu) = 0$ 的三个根 $\tilde{\mu}_1(d_4)$, $\tilde{\mu}_2(d_4)$ 和 $\tilde{\mu}_3(d_4)$ 都是实的并且满足关系式 (6.3.28) 和 (6.3.29). 同时还有 (当 $d_4 \geqslant d_4^*$ 时)

$$\begin{cases} -\infty < \tilde{\mu}_1(d_4) < 0 < \tilde{\mu}_2(d_4) < \tilde{\mu}_3(d_4),\\ \mathcal{C}(d_1,d_4;\mu) < 0 \quad \text{当 } \mu \in \big(-\infty,\, \tilde{\mu}_1(d_4)\big) \cup \big(\tilde{\mu}_2(d_4),\, \tilde{\mu}_3(d_4)\big) \text{时},\\ \mathcal{C}(d_1,d_4;\mu) > 0 \quad \text{当 } \mu \in \big(\tilde{\mu}_1(d_4),\, \tilde{\mu}_2(d_4)\big) \cup \big(\tilde{\mu}_3(d_4),\, \infty\big) \text{ 时}. \end{cases}$$

下面讨论 $\mathcal{C}(d_1,d_4;\mu)$ 关于 d_1 的依赖性. 为此我们考虑极限:

$$\begin{aligned}\lim_{d_1\to\infty}\frac{C_3}{d_1} &= d_3\Big(d_2 + \frac{d_4}{\sigma + \tilde{w}^2}\Big) := b_3(\sigma),\\ \lim_{d_1\to\infty}\frac{C_2}{d_1} &= md_2 + d_3 + \frac{md_4}{(\sigma + \tilde{w}^2)^2}(\sigma - \tilde{w}^2) := b_2(\sigma),\\ \lim_{d_1\to\infty}\frac{C_1}{d_1} &= 0,\\ \lim_{d_1\to\infty}\frac{\mathcal{C}(d_1,d_4;\mu)}{d_1} &= \mu^2[b_3(\sigma)\mu + b_2(\sigma)].\end{aligned}$$

当参数满足 $b_2(\sigma) < 0$, 即

$$md_2 + d_3 + \frac{m\sigma d_4}{(\sigma + \tilde{w}^2)^2} < \frac{m\tilde{w}^2 d_4}{(\sigma + \tilde{w}^2)^2} \tag{6.3.30}$$

时, 我们有与命题 6.3.1 类似的结论:

命题 6.3.2　假设条件 (6.3.30) 成立. 则存在正常数 d_1^*, 当 $d_1 \geqslant d_1^*$ 时代数方程 $\mathcal{C}(d_1, d_4; \mu) = 0$ 的三个根 $\bar{\mu}_1(d_1)$, $\bar{\mu}_2(d_1)$ 和 $\bar{\mu}_3(d_1)$ 都是实的, 并且满足

$$\lim_{d_1\to\infty} \bar{\mu}_1(d_1) = \lim_{d_1\to\infty} \bar{\mu}_2(d_1) = 0,$$
$$\lim_{d_1\to\infty} \bar{\mu}_3(d_1) = \frac{-b_2(\sigma)}{b_3(\sigma)} := \bar{\mu} > 0. \tag{6.3.31}$$

此外当 $d_1 \geqslant d_1^*$ 时, 还有

$$\begin{cases} -\infty < \bar{\mu}_1(d_1) < 0 < \bar{\mu}_2(d_1) < \bar{\mu}_3(d_1), \\ \mathcal{C}(d_1, d_4; \mu) < 0 \quad \text{当 } \mu \in \big(-\infty, \bar{\mu}_1(d_1)\big) \cup \big(\bar{\mu}_2(d_1), \bar{\mu}_3(d_1)\big) \text{时}, \\ \mathcal{C}(d_1, d_4; \mu) > 0 \quad \text{当 } \mu \in \big(\bar{\mu}_1(d_1), \bar{\mu}_2(d_1)\big) \cup \big(\bar{\mu}_3(d_1), \infty\big) \text{时}. \end{cases} \tag{6.3.32}$$

注 6.3.1　假设 $\sigma < \tilde{w}^2$. 如果

(1) d_4 很大, 或者

(2) $d_4 > 0$ 固定, d_2, d_3 很小,

那么不等式 (6.3.30) 成立.

定理 6.3.4　设参数 $d_1, d_2, d_3, a, b, k, m, \varepsilon$ 和 σ 固定, 并且满足 $m < abk$, $\sigma < \tilde{w}^2$. 取 $\tilde{\mu}$ 由极限 (6.3.29) 确定. 如果 $\tilde{\mu} \in (\mu_j, \mu_{j+1})$ 对某个 $j \geqslant 2$ 成立, 并且和 $\sum\limits_{i=2}^{j} \dim E(\mu_i)$ 是奇数, 则存在正常数 d_4^*, 当 $d_4 \geqslant d_4^*$ 时问题 (6.3.1) 至少有一个非常数正解.

定理 6.3.5　假设参数 $d_2, d_3, d_4, a, b, k, m, \varepsilon$ 和 σ 固定, 并且满足 $m < abk$ 和条件 (6.3.30). 取 $\bar{\mu}$ 由极限 (6.3.31) 确定. 如果 $\bar{\mu} \in (\mu_j, \mu_{j+1})$ 对某个 $j \geqslant 2$ 成立, 并且和 $\sum\limits_{i=2}^{j} \dim E(\mu_i)$ 是奇数, 则存在正常数 d_1^*, 当 $d_1 \geqslant d_1^*$ 时问题 (6.3.1) 至少有一个非常数正解.

由于定理 6.3.4 和定理 6.3.5 的证明类似, 我们只证明定理 6.3.5.

定理 6.3.5 的证明　由命题 6.3.2 以及关于 $\bar{\mu}$ 的条件知, 存在正常数 d_1^*, 当 $d_1 \geqslant d_1^*$ 时估计式 (6.3.32) 成立, 并且

$$\bar{\mu}_1 < 0 = \mu_1 < \bar{\mu}_2 < \mu_2, \quad \bar{\mu}_3 \in (\mu_j, \mu_{j+1}). \tag{6.3.33}$$

我们将证明对任意的 $d_1 \geqslant d_1^*$, 问题 (6.3.1) 至少有一个非常数正解. 利用反证法和拓扑度的同伦不变性来证.

假设对某个 $d_1 = \bar{d}_1 \geqslant d_1^*$, 问题 (6.3.1) 没有非常数正解. 下面我们固定 $d_1 = \bar{d}_1$.

对于 $t \in [0, 1]$, 定义

$$\Phi(t; U) = \left([td_1 + (1-t)\hat{d}_1]u,\ d_2v + td_4v/(\sigma + w^2),\ d_3w\right)^{\mathrm{T}},$$

并考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta\Phi(t; U) = G(U), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.3.34}$$

这里的正常数 $\hat{d}_1$ 由定理 6.3.3 确定. 那么 U 是问题 (6.3.1) 的一个非常数正解当且仅当对于 $t = 1$, 它是问题 (6.3.34) 的一个非常数正解. 容易看出, 对任意的 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\widetilde{U}$ 是问题 (6.3.34) 的唯一正常数解. 同于 6.1 节, 对任意的 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 正函数 U 是问题 (6.3.34) 的解当且仅当

$$\mathcal{F}(t;U) := U - (I-\Delta)^{-1}\left\{\Phi_U^{-1}(t;U)[G(U) + \nabla U\, \Phi_{UU}(t;U)\nabla U^{\mathrm{T}}] + U\right\} = 0.$$

显然有 $\mathcal{F}(1; U) = \mathcal{F}(U)$. 定理 6.3.3 说明 $\widetilde{U}$ 是方程 $\mathcal{F}(0; U) = 0$ 在 X^+ 内的唯一解 (X^+ 的定义同于 6.2.5 节). 直接计算知

$$\begin{aligned} D_U\mathcal{F}(0; \widetilde{U}) &= I - (I-\Delta)^{-1}\{\mathcal{D}^{-1}G_U(\widetilde{U}) + I\}, \\ D_U\mathcal{F}(1; \widetilde{U}) &= I - (I-\Delta)^{-1}\{\Phi_U^{-1}(\widetilde{U})G_U(\widetilde{U}) + I\} = \mathcal{F}_U(\widetilde{U}), \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{D} = \mathrm{diag}(\hat{d}_1, d_2, d_3)$. 同于式 (6.1.13), 记

$$H(t;\mu) = \det\{\Phi_U^{-1}(t;\widetilde{U})\}\det\{\mu\,\Phi_U(t;\widetilde{U}) - G_U(\widetilde{U})\}.$$

根据此式和式 (6.3.27), 我们有

$$H(0;\mu) = (\hat{d}_1d_2d_3)^{-1}\,\mathcal{C}(\hat{d}_1, 0; \mu), \tag{6.3.35}$$

$$H(1;\mu) = \det\{\Phi_U^{-1}(\widetilde{U})\}\,\mathcal{C}(d_1, d_4; \mu). \tag{6.3.36}$$

因为对所有的 i 都有 $\mu_i \geqslant 0$, 所以 $\mathcal{C}(\hat{d}_1, 0; \mu_i) > 0$, 再由式 (6.3.35) 知 $H(0;\mu_i) > 0$, $\forall i \geqslant 1$. 根据定理 6.1.1,

$$\mathrm{index}\,(I - \mathcal{F}(0;\cdot), \widetilde{U}) = (-1)^0 = 1. \tag{6.3.37}$$

注意到式 (6.3.32) 和式 (6.3.33), 从式 (6.3.36) 推知

$$\begin{cases} H(1;\mu_1) = H(0) > 0, \\ H(1;\mu_i) < 0, & 2 \leqslant i \leqslant j, \\ H(1;\mu_i) > 0, & i \geqslant j+1. \end{cases}$$

于是对所有 $i \geqslant 1$, 零不是矩阵 $\mu_i I - \Phi_U^{-1}(\widetilde{U})G_U(\widetilde{U})$ 的特征值. 根据已知条件,

$$\gamma = \sum_{i\geqslant 1, H(\mu_i)<0} \dim E(\mu_i) = \sum_{i=2}^{j} \dim E(\mu_i)$$

是奇数, 再由定理 6.1.1,

$$\operatorname{index}\left(I - \mathcal{F}(1;\cdot), \widetilde{U}\right) = (-1)^\gamma = -1. \tag{6.3.38}$$

根据定理 6.3.1 和定理 6.3.2, 存在正常数 C, 使得对所有的 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 问题 (6.3.34) 的正解都满足 $C^{-1} < u, v, w < C$. 于是对所有 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 在 $\partial B(C)$ 上 $\mathcal{F}(t; U) \neq 0$, 这里 $B(C)$ 的定义同于 6.1 节. 利用拓扑度的同伦不变性,

$$\deg(\mathcal{F}(1;\cdot), 0, B(C)) = \deg(\mathcal{F}(0;\cdot), 0, B(C)). \tag{6.3.39}$$

另一方面, 由假设条件知, 方程 $\mathcal{F}(1; U) = 0$ 和 $\mathcal{F}(0; U) = 0$ 在 $B(C)$ 内都只有解 $\widetilde{U}$, 进而从式 (6.3.37) 和式 (6.3.38) 又得

$$\deg(\mathcal{F}(0;\cdot), 0, B(C)) = \operatorname{index}(I - \mathcal{F}(0;\cdot), \widetilde{U}) = 1,$$
$$\deg(\mathcal{F}(1;\cdot), 0, B(C)) = \operatorname{index}(I - \mathcal{F}(1;\cdot), \widetilde{U}) = -1.$$

此与式 (6.3.39) 矛盾.

习 题 6

6.1 证明式 (6.1.2).

6.2 当式 (6.2.25) 中的 d_1, d_2, d_3 至少有一个为 ∞ 时, 完成定理 6.2.4 的证明.

6.3 证明定理 6.2.6.

6.4 利用积分估计方法证明定理 6.3.3.

6.5 证明式 (6.3.20).

6.6 证明定理 6.3.4.

第7章　解耦方法

本章的内容参考了文献 [18].

一些具有特殊结构的椭圆型方程组的边值问题, 可以转化成方程式的边值问题来研究, 这就是所谓的解耦方法. 本章仅以下面的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) - v, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{7.1}$$

为例来介绍这种方法, 其中区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界, $\partial\Omega$ 适当光滑, $n \geqslant 2$, $\delta, \gamma > 0$.

对于适当给定的 u, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta v + \gamma v = \delta u, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一解 v. 由此定义了算子 $B: Bu = v$. 因为 $\gamma > 0$, 利用椭圆型方程解的正则性理论知,

$$\begin{aligned} &B: L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ &B: L^p(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), \\ &B: C^\alpha(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

是有界线性算子. 于是求解问题 (7.1) 等价于求解边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.2}$$

7.1　最大值原理与上下解方法

本节我们借助于最大值原理构造上下解, 证明问题 (7.2) 至少有一个正解 u, 进而推知问题 (7.1) 至少有一个正解 (u, v), $v = Bu$.

先考虑算子

$$\begin{cases} T = -\Delta + B: D(T) \longrightarrow L^2(\Omega), \\ D(T) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \end{cases} \tag{7.1.1}$$

明显地 T 是对称的, 即对于任意的 $u_1, u_2 \in D(T)$, 有 $(Tu_1, u_2) = (u_1, Tu_2)$. 利用 L^2 正则性理论易证 T 是闭算子. 记 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$ 是 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的全部特征值, φ_k 是对应的特征函数. 容易验证

$$\lambda_k^* = \lambda_k + \delta/(\gamma + \lambda_k), \quad k = 1, 2, \cdots$$

是 T 的特征值, φ_k 是对应的特征函数. 由于 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ 是完备的, 所以 $\{\lambda_k^*\}_{k=1}^\infty$ 是 T 的全部特征值. 我们将证明 $\sigma(T) = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^\infty$.

记 $\rho(T)$ 为 T 的预解集. 对于任意的 $\lambda \in \rho(T)$, 用 $T_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ 表示 T 的预解式.

引理 7.1.1 (预解式的表示式)　设实数 a, b 满足

$$a > -\lambda_1, \quad \gamma + b > -\lambda_1, \quad b \neq 0, \quad b\gamma + \delta = ab. \tag{7.1.2}$$

则 $\lambda = -a - b \in \rho(T)$, 且

$$\begin{aligned} T_\lambda &= (\gamma + b - \Delta)^{-1}(\gamma - \Delta)(a - \Delta)^{-1} \\ &= [I - b(\gamma + b - \Delta)^{-1}](a - \Delta)^{-1}. \end{aligned}$$

证明　对于 $\lambda = -a - b$, 可写

$$T - \lambda I = (a - \Delta) + b\left(\frac{b\gamma + \delta}{b} - \Delta\right)(\gamma - \Delta)^{-1}.$$

于是由条件 (7.1.2) 的最后一个等式便推出

$$T - \lambda I = (a - \Delta)(\gamma - \Delta)^{-1}(\gamma + b - \Delta).$$

再由条件 (7.1.2) 得

$$\begin{aligned} T_\lambda &= (\gamma + b - \Delta)^{-1}(\gamma - \Delta)(a - \Delta)^{-1} \\ &= [I - b(\gamma + b - \Delta)^{-1}](a - \Delta)^{-1}. \end{aligned}$$

引理得证.

引理 7.1.2　假设 $\beta + \lambda_1 > 0$, 在 Ω 内函数 $w \geqslant 0, \neq 0$. 如果 $v \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta v + \beta v = w, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

则 $v \geqslant 0$ 在 Ω 内几乎处处成立. 又若 $w \in C(\bar{\Omega})$, 那么在 Ω 内 $v > 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} < 0$.

证明 用 $v^- := \min\{0, v\}$ 乘以方程两边并积分, 再利用 Poincaré不等式得

$$(\beta+\lambda_1)\|v^-\|_2^2 \leqslant ((-\Delta+\beta)v^-, v^-) = \int_\Omega wv^-\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

因此 $v^- = 0$ 几乎处处成立, 于是 $v \geqslant 0$ 几乎处处成立.

又若 $w \in C(\bar{\Omega})$, 则 $v \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$. 取 $c > 0$ 使得 $c + \beta > 0$. 那么 v 满足

$$\begin{cases} -\Delta v + (c+\beta)v = w + cv \geqslant 0, \not\equiv 0, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

利用强极大值原理和 Hopf 引理, 可以推出所要结论. 证毕.

定理 7.1.1 *如果 $\gamma + \lambda_1 > \sqrt{\delta}$, 则当*

$$2\sqrt{\delta} - \gamma \leqslant \lambda < \lambda_1^* := \lambda_1 + \delta/(\lambda_1+\gamma)$$

时, T_λ 是正算子. 又若 $w \in C(\bar{\Omega})$, $w \geqslant 0, \not\equiv 0$, 那么在 Ω 内 $v = T_\lambda w > 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} < 0$.

证明 引理 7.1.2 说明当 $\beta + \lambda_1 > 0$ 时, $(-\Delta+\beta)^{-1}$ 是正算子. 取

$$a = \frac{1}{2}\big[\gamma - \lambda + \sqrt{(\gamma+\lambda)^2 - 4\delta}\big],$$
$$b = \frac{1}{2}\big[-\gamma - \lambda - \sqrt{(\gamma+\lambda)^2 - 4\delta}\big] < 0.$$

利用 $\gamma + \lambda_1 > \sqrt{\delta}$ 和 $2\sqrt{\delta} - \gamma \leqslant \lambda < \lambda_1 + \delta/(\lambda_1+\gamma)$, 容易验证 a, b 满足引理 7.1.1 的条件且 $\gamma - a > 0$. 于是

$$\begin{aligned} T_\lambda &= (\gamma+b-\Delta)^{-1}(\gamma-\Delta)(a-\Delta)^{-1} \\ &= (\gamma+b-\Delta)^{-1}[(\gamma-a)(a-\Delta)^{-1} + I]. \end{aligned}$$

由 $\gamma + b + \lambda_1 > 0$, $a + \lambda_1 > 0$ 和 $\gamma - a > 0$ 知, T_λ 是正算子. 方程

$$v = T_\lambda w$$

等价于

$$\begin{cases} -\Delta v + (\gamma+b)v = [(\gamma-a)(a-\Delta)^{-1} + I]w, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

应用引理 7.1.2 知结论成立. 证毕.

定理 7.1.2 $\sigma(T)$ 仅由 $\{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ 构成.

证明 设 $\lambda \notin \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, 则 $T-\lambda I$ 是 $1-1$ 的. 如果我们能够证明 $T-\lambda I$ 是到上的, 由闭图像定理可推出 $\lambda \in \rho(T)$. 取 $\mu \in \rho(T)$. 对于任意 $v \in L^2(\Omega)$, 方程 $Tu-\lambda u = v$ 有解当且仅当方程 $Tu-\mu u = (\lambda-\mu)u+v$ 有解, 即方程

$$u = (\lambda-\mu)T_\mu u + T_\mu v \tag{7.1.3}$$

有解. 根据 Fredholm 二择一定理, 对任意的 $v \in L^2(\Omega)$, 方程 (7.1.3) 有唯一解当且仅当齐次方程 $u = (\lambda-\mu)T_\mu u$ 只有零解. 因为 $\lambda \notin \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, 并且 $u = (\lambda-\mu)T_\mu u$ 等价于 $Tu = \lambda u$, 所以 $u = (\lambda-\mu)T_\mu u$ 只有零解, 于是问题 (7.1.3) 有唯一解. 故 $T-\lambda I$ 是到上的. 证毕.

引理 7.1.3 设 $\gamma+\lambda_1 > \sqrt{\delta}$, 并记 $\{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ 中的最小者为 λ^*. 则 $\lambda^* = \lambda_1^*$, 并且还有

$$(Tu,u) \geqslant \lambda^*\|u\|_2^2, \quad \forall\, u \in D(T). \tag{7.1.4}$$

证明 直接计算知 $\lambda^* = \lambda_1^*$. 因为 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的完备正交系, 所以可分解 $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k$, 其中 $\alpha_k = (u,\varphi_k)$. 于是

$$(Tu,u) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(Tu,\varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(u,T\varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\lambda_k^*.$$

由此知不等式 (7.1.4) 成立. 证毕.

同样的方法可以证明

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x + (Bu,u) \geqslant \lambda^*\|u\|_2^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{7.1.5}$$

假设

(f_1) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 局部 Lipschitz 连续;

(f_2) $\limsup\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{f(s)}{s} < \lambda^*$ (λ^* 是 T 的最小特征值);

(f_3) $\liminf\limits_{|s|\to 0}\dfrac{f(s)}{s} > \lambda_1^*$.

定理 7.1.3 设 $\gamma+\lambda_1 > \sqrt{\delta}$, 条件 $(f_1)\sim(f_3)$ 成立, $f \in C^1([0,\infty))$. 记 β 是 $f(s)$ 的第一个正零点 (如果 $f(s)$ 没有正零点, 就取 $\beta=\infty$). 如果

$$\inf\{f'(s):\, 0 \leqslant s < \beta\} \geqslant 2\sqrt{\delta}-\gamma, \tag{7.1.6}$$

则问题 (7.2) 至少有一个正解 u, 进而推出问题 (7.1) 至少有一个正解 (u,v), 这里的 $v = Bu$.

证明 首先, 由条件 $\gamma+\lambda_1>\sqrt{\delta}$ 易知, $2\sqrt{\delta}-\gamma<\lambda_1^*=\lambda^*$ (引理 7.1.3).

(1) 由条件 (f_3) 知, 存在 $\mu>\lambda_1^*$ 和 $s_0>0$, 使得当 $0\leqslant s\leqslant s_0$ 时, $f(s)\geqslant \mu s$. 所以当 $\varepsilon>0$ 充分小时, $\underline{u}=\varepsilon\varphi_1$ 是问题 (7.2) 的一个下解.

(2) 当 $\beta<\infty$ 时, $\bar{u}=\beta$ 是问题 (7.2) 的一个上解. 当 $\beta=\infty$ 时, 我们如下构造问题 (7.2) 的上解 $\bar{u}$. 由条件 (f_2) 知, 存在 $2\sqrt{\delta}-\gamma<\mu<\lambda^*=\lambda_1^*$ 和常数 $C>0$, 使得 $f(s)\leqslant \mu s+C$ $(s\geqslant 0)$. 取 $\bar{u}$ 是问题

$$\begin{cases}-\Delta\bar{u}+B\bar{u}=\mu\bar{u}+C, & x\in\Omega,\\ \bar{u}(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{7.1.7}$$

的解. 由定理 7.1.1 知: 在 Ω 内 $\bar{u}>0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}<0$. 此时容易验证 $\bar{u}$ 是问题 (7.2) 的上解.

总可以取 $\varepsilon>0$ 充分小, 使得 $\varepsilon\varphi_1<\bar{u}$ 在 Ω 内成立.

(3) 前两步说明问题 (7.2) 存在有序上下解. 取 $\lambda=2\sqrt{\delta}-\gamma$, 由定理 7.1.1 知 $T_\lambda=(-\Delta+B-\lambda I)^{-1}$ 是正算子. 条件 (7.1.6) 说明函数 $f(s)-\lambda s$ 在 $[0,\max_{\bar{\Omega}}\bar{u}(x)]$ 上是非减的. 因此, 我们可以用单调迭代方法证明问题 (7.2) 在 $\langle\varepsilon\varphi_1,\bar{u}\rangle$ 中至少有一个解 u, 从而问题 (7.1) 至少有一个正解 (u,v), 其中 $v=Bu$. 定理得证.

例 取 $f(u)=au-u^3$, $a>0$, 则 $\beta=\sqrt{a}$, $\min\{f'(s):0\leqslant s\leqslant\beta\}=-2a$. 所以当

$$\lambda_1+\delta/(\gamma+\lambda_1)=\lambda_1^*<a\leqslant\gamma/2-\sqrt{\delta}$$

时, 定理 7.1.3 的结论成立. 于是问题 (7.1) 至少有一个正解.

7.2 变分方法

本节利用变分方法证明问题 (7.2) 至少有两个非平凡解, 从而问题 (7.1) 至少有两个非平凡解.

(f_4) $\lim\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{f(s)}{|s|^p}=0$. 这里当 $n\geqslant 3$ 时, $1<p<(n+2)/(n-2)$; 当 $n=2$ 时, $1<p<\infty$.

引理 7.2.1 *假设条件 (f_1), (f_2) 和 (f_4) 成立 (条件 (f_1), (f_2) 由上节给出), 则问题 (7.1) 的解在 $L^\infty(\Omega)$ 中有先验界.*

证明 由条件 (f_2) 知, 存在 $0<\mu<\lambda^*$ 和 $M>0$, 使得

$$\begin{cases}f(s)\leqslant\mu s+M, & s\geqslant 0,\\ f(s)\geqslant\mu s-M, & s<0.\end{cases}\tag{7.2.1}$$

因为问题 (7.1) 等价于问题 (7.2), 用 u 乘问题 (7.2) 的方程两边并积分, 再利用不等式 (7.1.5) 可得

$$\lambda^* \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega (Bu)u \mathrm{d}x = \int_\Omega f(u)u \mathrm{d}x. \tag{7.2.2}$$

由式 (7.2.1) 知

$$\int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x \leqslant \mu \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + M \int_\Omega |u| \mathrm{d}x. \tag{7.2.3}$$

注意到 $\mu < \lambda^*$, 从不等式 (7.2.2) 和 (7.2.3) 推知

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \leqslant C.$$

因为 B 是 $L^2(\Omega)$ 上的有界线性算子, 再次利用不等式 (7.2.2) 和 (7.2.3) 便可推得

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant C,$$

于是 $\|u\|^2_{H^1_0}(\Omega) \leqslant C$.

根据条件 (f_4), 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在正常数 C_ε 使得

$$|f(s)| \leqslant \varepsilon |s|^p + C_\varepsilon. \tag{7.2.4}$$

由于 $u \in H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, 故 $Bu \in W^{2,q}(\Omega)$. 利用鞋带法易证, 存在正常数 C_0 仅与 μ, M 和 C_ε 有关, 使得

$$\|u\|_\infty \leqslant C_0, \tag{7.2.5}$$

再由 $v = Bu$ 及 B 的有界性知 $\|v\|_\infty \leqslant C_1$, 其中 C_1 是仅与 μ, M 和 C_ε 有关的正常数. 证毕.

下面总假设条件 (f_1), (f_2) 和 (f_4) 成立. 取常数 $C^* > C_0$ 和整体 Lipschitz 连续函数 $\bar{f}(s)$, 使得

当 $|s| \leqslant C^*$ 时, $\bar{f}(s) = f(s)$, $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{\bar{f}(s)}{s} = l$, $0 < l < \mu < \lambda^*$. 同时 $\bar{f}(s)$ 满足不等式 (7.2.1) 和 (7.2.4).

因此边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \bar{f}(u) - v, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{7.2.6}$$

的解 (u,v) 仍有估计 $\|u\|_\infty \leqslant C_0$. 因而 $\bar{f}(u)=f(u)$, 故问题 (7.1) 与问题 (7.2.6) 等价.

边值问题 (7.2.6) 可写成

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu = \bar{f}(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.2.7}$$

算子 B 的定义同上. 考虑泛函

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(Bu,u) - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x, \tag{7.2.8}$$

其中 $F(u) = \int_0^u \bar{f}(s)\mathrm{d}s$. 容易看出 $\Phi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 的, 且

$$(\Phi'(u), w)_{H^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \mathrm{d}x + \int_\Omega (Bu)w\mathrm{d}x - \int_\Omega \bar{f}(u)w\mathrm{d}x.$$

由此易知 Φ 的临界点 u 是问题 (7.2.7) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的解. 再用鞋带法容易证明, 这种解属于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, 即是问题 (7.2.7) 的古典解. 所以 (u,v) 是问题 (7.1) 的古典解, 其中 $v = Bu$.

定义 7.2.1 (Palais-Smale 条件, 简称 P–S 条件) 设 X 是 Banach 空间. 称泛函 $f \in C^1(X,\mathbb{R})$ 满足 P–S 条件, 如果对任何点列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset X$, 由 $\{f(x_i)\}_{i=1}^\infty$ 有界和 $f'(x_i) \longrightarrow 0$ 可以推得 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 有收敛的子列.

引理 7.2.2 由式 (7.2.8) 所定义的泛函 Φ 满足 P–S 条件.

证明 由 Poincaré 不等式知, $\|\nabla u\|_2$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数,

$$(u,w)_{H^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \mathrm{d}x$$

可以看成 $H_0^1(\Omega)$ 中的内积. 按照下面的方式分别定义非线性算子 $f_0 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 和线性算子 $B_0 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} (f_0(u), w)_{H^1} &= \int_\Omega \bar{f}(u)w\mathrm{d}x, \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega), \\ (B_0 u, w)_{H^1} &= \int_\Omega (Bu)w\mathrm{d}x, \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

先证 $f_0 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 是紧的. 事实上, 记 $\bar{f}$ 的整体 Lipschitz 常数是 τ, 则存在正常数 $\tau > l$ 和 M, 使得 $|\bar{f}(u)| \leqslant \tau|u| + M$. 假设 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界列, 那么存在子列仍记为 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, 存在 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \rightharpoonup u$, 在

$L^2(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u$. 又因为对任意 $w \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\nabla f_0(u_i) - \nabla f_0(u), \nabla w\right)_{L^2}\right| &= \left|\left(f_0(u_i) - f_0(u), w\right)_{H^1}\right| \\
&= \left|\int_\Omega \left[\bar{f}(u_i) - \bar{f}(u)\right] w \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_\Omega \left[\tau |u_i - u| \cdot |w|\right] \mathrm{d}x \\
&\leqslant \tau \|u_i - u\|_2 \|w\|_2 \\
&\leqslant C \|u_i - u\|_2 \|\nabla w\|_2,
\end{aligned}
$$

所以当 $i \longrightarrow \infty$ 时有

$$
\|\nabla f_0(u_i) - \nabla f_0(u)\|_2 \leqslant C \|u_i - u\|_2 \longrightarrow 0.
$$

故在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $f_0(u_i) \longrightarrow f_0(u)$. 因而 $f_0 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 是紧的.

由于 $B : H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ 是紧线性算子, 显然 $B_0 : H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ 也是紧的.

至此我们得到: $\Phi' = I + B_0 - f_0$ 是一个恒同算子与一个紧算子的和. 为了证明 Φ 满足 P–S 条件, 只需证明

(A) 对于每一个满足 $|\Phi(u_i)| \leqslant C$ 以及 $\Phi'(u_i) \longrightarrow 0$ 的序列 $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1$, 都存在一个子列仍记为 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, 使得 $\|u_i\|_{H^1} \leqslant C$.

见习题 7.5.

下面证明结论 (A). 由 $\Phi'(u_i) \longrightarrow 0$ 知, 存在 $\varepsilon_i \searrow 0$ 和 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 的子列仍记为它自身, 使得

$$
\left|\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla w \mathrm{d}x + \int_\Omega (B u_i) w \mathrm{d}x - \int_\Omega \bar{f}(u_i) w \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon_i \|w\|_{H^1}, \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega).
$$

在上式中取 $w = u_i$, 利用不等式 (7.1.5) 得

$$
\lambda^* \int_\Omega u_i^2 \mathrm{d}x \leqslant \left|\int_\Omega \bar{f}(u_i) u_i \mathrm{d}x\right| + \varepsilon_i \|u_i\|_{H^1}.
$$

根据 $\bar{f}$ 的截断性质, 从上式可推出

$$
\int_\Omega u_i^2 \mathrm{d}x \leqslant C + C\varepsilon_i \|u_i\|_{H^1}.
$$

由于 $|\Phi(u_i)| \leqslant C$, 故有

$$
\int_\Omega |\nabla u_i|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left|\int_\Omega (B u_i) u_i \mathrm{d}x\right| + 2\left|\int_\Omega F(u_i) \mathrm{d}x\right| + C. \tag{7.2.9}
$$

再利用 $\bar{f}$ 的截断性质及 B 的有界性, 从式 (7.2.9) 可推知

$$\int_{\Omega}|\nabla u_i|^2\mathrm{d}x \leqslant C + C\varepsilon_i\|u_i\|_{H^1}.$$

因为 $\varepsilon_i \searrow 0$, 所以 $\|u_i\|_{H^1} \leqslant C$. 证毕.

引理 7.2.3 *泛函 Φ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有下界, 且* $\lim\limits_{\|u\|_{H^1}\to\infty}\Phi(u)=\infty$.

证明 由 $\lim\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{\bar{f}(s)}{s}=l$ 知, 对于任意固定的 $\varepsilon: 0<\varepsilon<\lambda^*-l$, 存在正常数 M_0 使得

$$\left|\int_{\Omega}F(u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{l+\varepsilon}{2}\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x + M_0. \tag{7.2.10}$$

利用不等式 (7.1.5) 以及 $0<l<\mu<\lambda^*$ 推出

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geqslant \frac{1}{2}\lambda^*\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x - \frac{l+\varepsilon}{2}\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x - M_0\\ &= \frac{1}{2}\left[\lambda^*-(l+\varepsilon)\right]\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x - M_0 \\ &\geqslant -M_0.\end{aligned} \tag{7.2.11}$$

用反证法证明 $\lim\limits_{\|u\|_{H^1}\to\infty}\Phi(u)=\infty$. 假设存在序列 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}\subset H_0^1(\Omega)$ 和正常数 C, 满足

$$\|u_i\|_{H^1}\longrightarrow\infty, \quad \Phi(u_i)\leqslant C, \quad \forall\, i.$$

我们分两种情况导出矛盾.

(1) 若存在子列 $\{u_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $\|u_{i_k}\|_2\longrightarrow\infty$. 那么由不等式 (7.2.11) 知 $\Phi(u_{i_k})\longrightarrow\infty$. 这是一个矛盾.

(2) 假设存在正常数 M, 使得 $\|u_i\|_2\leqslant M$ 对所有 i 成立. 因为 $\|u_i\|_{H^1}\longrightarrow\infty$, 所以 $\|\nabla u_i\|_2\longrightarrow\infty$. 由于 $B: L^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega)$ 是有界线性算子, 故 (Bu_i,u_i) 有界. 由不等式 (7.2.10) 知 $\int_{\Omega}F(u_i)\mathrm{d}x$ 也有界. 再由 $\Phi(u)$ 的定义以及 $\|\nabla u_i\|_2\longrightarrow\infty$ 便可推得 $\Phi(u_i)\longrightarrow\infty$. 这也是一个矛盾. 引理得证.

引理 7.2.4 $\|B\|\leqslant\delta/\gamma$, *其中* $\|B\|=\sup\limits_{u\neq 0}\dfrac{\|Bu\|_2}{\|u\|_2}$.

证明 记 $v=Bu$, 则

$$\begin{cases}-\Delta v+\gamma v=\delta u, & x\in\Omega,\\ v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

方程两边同乘以 v 并积分得

$$\int_{\Omega}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\gamma\int_{\Omega}v^2\mathrm{d}x=\delta\int_{\Omega}(Bu)u\mathrm{d}x\leqslant\delta\|u\|_2\cdot\|Bu\|_2.$$

由此得, $\gamma\|Bu\|_2^2=\gamma\|v\|_2^2\leqslant\delta\|u\|_2\|Bu\|_2$. 于是

$$\|B\|=\sup_{u\neq 0}\frac{\|Bu\|_2}{\|u\|_2}\leqslant\frac{\delta}{\gamma}.$$

引理得证.

设 Ω 包含的最大球的半径是 R, 不妨认为该球的中心是原点.

引理 7.2.5　如果存在 $b>0$ 使得 $F(b)>\delta b^2/(2\gamma)$, 则当 R 充分大时, 如下定义的函数 u_R:

$$u_R=\begin{cases}b, & 0\leqslant\|x\|\leqslant R-1,\\(R-\|x\|)b, & R-1\leqslant\|x\|\leqslant R,\\0, & x\in\Omega\setminus B_R(0)\end{cases}$$

满足 $\Phi(u_R)<0$.

证明　令 $C_R=B_R(0)-B_{R-1}(0)$, 则存在 k_n 使得 $|C_R|\leqslant k_nR^{n-1}$. 于是

$$\begin{aligned}\Phi(u_R)=&\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}|\nabla u_R|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}(Bu_R)u_R\mathrm{d}x-\int_{B_R(0)}F(u_R)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\int_{C_R}|\nabla u_R|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}(Bu_R)u_R\mathrm{d}x-\int_{B_{R-1}(0)}F(b)\mathrm{d}x-\int_{C_R}F(u_R)\mathrm{d}x\\\leqslant&\frac{b^2}{2}|C_R|+\frac{\delta}{2\gamma}\int_{B_R(0)}u_R^2\mathrm{d}x-F(b)|B_{R-1}(0)|+c|C_R|\\\leqslant&\frac{b^2}{2}|C_R|+\frac{\delta}{2\gamma}b^2|B_R(0)|-F(b)|B_{R-1}(0)|+c|C_R|\\\leqslant&\frac{b^2}{2}k_nR^{n-1}+\frac{\delta}{2\gamma}b^2\omega_nR^n-F(b)\omega_n(R-1)^n+ck_nR^{n-1}\\<&0\ (\text{当 } R\gg 1 \text{ 时}),\end{aligned}$$

其中 $c=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant b}|F(s)|$. 证毕.

定理 7.2.1　设条件 (f_1), (f_2) 和 (f_4) 成立. 如果存在 $b>0$ 使得 $F(b)>\delta b^2/(2\gamma)$, 则当 R 充分大时问题 (7.2.6) 有一个非平凡解. 从而问题 (7.1) 有一个非平凡解.

证明　根据引理 7.2.2 和引理 7.2.3, 泛函 Φ 在临界点 $u_1\in H_0^1(\Omega)$ 处取到它在 $H_0^1(\Omega)$ 上的整体极小 (文献 [16] 的第 5 章定理 3.1 的系 1), 所以 u_1 是问题

(7.2.6) 的解. 由引理 7.2.5 知 $\varPhi(u_1)<0$, 因而 u_1 是非平凡的. 再利用鞋带法可证 $u_1\in C^{2+\alpha}(\varOmega)$, 因而 (u_1,v_1) 是问题 (7.1) 的非平凡的古典解, 其中 $v_1=Bu_1$. 证毕.

山路引理 设 E 是一个 Hilbert 空间, $\varPhi\in C^1(E,\mathbb{R})$, 存在 $u_0,\,u_1\in E$ 和正常数 r,k 满足:

(1) $\|u_0-u_1\|>r$;

(2) $\varPhi(u_0),\ \varPhi(u_1)<k$;

(3) 当 $\|u_0-u\|=r$ 时, $\varPhi(u)\geqslant k$.

令 $\sum=\{\sigma\in C([0,1],E):\sigma(0)=u_0,\,\sigma(1)=u_1\}$, 并定义

$$c=\inf_{\sigma\in\sum}\max_{u\in\sigma([0,1])}\varPhi(u).$$

如果 $\varPhi$ 满足 P–S 条件, 则 c 是 $\varPhi$ 的一个临界值.

定理 7.2.2 假设定理 7.2.1 的条件成立, 记 u_1 是由定理 7.2.1 得到的非平凡解. 又设存在 $0<\lambda<\lambda^*$ 和 $0<r<\|u_1\|_{H^1}$, 使得

$$\int_\varOmega F(u)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\lambda}{2}\int_\varOmega u^2\mathrm{d}x,\quad\forall\,u\in H_0^1(\varOmega),\quad\|u\|_{H^1}\leqslant r.\tag{7.2.12}$$

则当 R 充分大时, 问题 (7.2.6) 还有一个非平凡解 u_2 并满足

$$\inf_{\sigma\in\sum}\max_{u\in\sigma([0,1])}\varPhi(u)=\varPhi(u_2)>0,$$

其中 $\sum=\{\sigma\in C([0,1],H_0^1(\varOmega))|\ \sigma(0)=0,\,\sigma(1)=u_1\}$. 于是问题 (7.1) 还有一个非平凡解 (u_2,v_2), $v_2=Bu_2$.

证明 取 $E=H_0^1(\varOmega)$, $u_0=0$, 下面验证山路引理的条件.

当 $u\in H_0^1(\varOmega)$, $\|u\|_{H^1}\leqslant r$ 时, 利用不等式 (7.2.12) 和不等式 (7.1.5) 得

$$\begin{aligned}
\varPhi(u)&=\frac12\int_\varOmega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac12\int_\varOmega(Bu)u\mathrm{d}x-\int_\varOmega F(u)\mathrm{d}x\\
&\geqslant\frac12\left(\int_\varOmega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\varOmega(Bu)u\mathrm{d}x\right)-\frac{\lambda}{2}\int_\varOmega u^2\mathrm{d}x\\
&\geqslant\frac12\left(\int_\varOmega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\varOmega(Bu)u\mathrm{d}x\right)-\frac{\lambda}{2\lambda^*}\left(\int_\varOmega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\varOmega(Bu)u\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac12\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\int_\varOmega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\varOmega(Bu)u\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

从引理 7.2.4 的证明可以看出

$$\int_\varOmega(Bu)u\mathrm{d}x=\frac{1}{\delta}\left(\int_\varOmega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\gamma\int_\varOmega v^2\mathrm{d}x\right)\geqslant0,\quad v=B(u).$$

于是

$$\Phi(u) \geqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

取 $k=\frac{1}{2}(1-\lambda/\lambda^*)r^2>0$. 由 $\Phi(0)=0$ 和 $\Phi(u_1)<0$ 知山路引理的条件 (1)～(3) 成立, 再由引理 7.2.2 知 Φ 满足 P–S 条件, 故山路引理成立. 所以存在 Φ 的临界点 $u_2\in H_0^1(\Omega)$, 使得 $\Phi(u_2)=c$.

由于 $\|u_1\|_{H^1}>r$, 且当 $u\in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{H^1}=r$ 时, $\Phi(u)\geqslant k>0$, 所以

$$c=\inf_{\sigma\in\sum}\max_{u\in\sigma([0,1])}\Phi(u)=\Phi(u_2)\geqslant k>0.$$

于是 $u_2\neq u_1, u_2\neq 0$, 并且 u_2 是问题 (7.2.6) 的解. 因而 (u_2,v_2) 是问题 (7.1) 的另一个非平凡解, 其中 $v_2=Bu_2$. 证毕.

此定理说明问题 (7.1) 至少有两个非平凡古典解.

例 $f(u)=u(u-a)(1-u)$, $0<a<1/2$, $\Omega=B_R(0)$ 是球.

如果 $\gamma/\delta>9/(2a^2-5a+2)$, 则当 R 适当大时, 问题 (7.1) 至少有两个非平凡解.

习 题 7

7.1 证明由式 (7.1.1) 定义的算子 T 是对称算子.

7.2 证明不等式 (7.1.5).

7.3 证明问题 (7.1.7) 存在解.

7.4 证明估计式 (7.2.5).

7.5 设 X 是 Banach 空间, 泛函 $f\in C^1(X,\mathbb{R})$, 并且 $f'=I+A$, 其中 I 是恒同算子, A 是紧算子. 试证明: f 满足 P–S 条件当且仅当对任何点列 $\{x_i\}\subset X$, 由 $\{f(x_i)\}$ 有界和 $f'(x_i)\longrightarrow 0$ 便可推得 $\{x_i\}$ 存在有界子列.

第 8 章　Nehari 流形及其应用

Nehari 在文献 [32] 中引入一种集合用于研究一类二阶非线性椭圆型方程的边值问题, 后来人们发现这类集合在非线性偏微分方程的研究中有重要作用, 故把它称作 Nehari 流形. 目前 Nehari 流形已被广泛应用于非线性椭圆型方程的边值问题解的存在性、多解性、不存在性, 以及非线性发展方程整体解的存在性与不存在性的研究中. 鉴于本书的内容, 我们仅以二阶椭圆型方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

为例, 介绍 Nehari 流形以及它的应用. 本章的内容参考了文献 [33].

8.1　Nehari 流形

临界点理论中的一个重要事实是, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8.1.1}$$

的解对应于泛函 $J: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, u(x))\mathrm{d}x$$

的临界点, 其中 $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$. 方便起见, 记 $X = H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_X = \|\nabla u\|_2$.

如果 $J(u)$ 在 X 上有下界, 那么它在 X 上有极小点, 并且极小点还是 $J(u)$ 的临界点. 但是对于许多非线性椭圆型方程的边值问题, 对应的泛函 $J(u)$ 不是在整个 X 上有下界, 而是在 X 的一个“适当好”的集合上有下界, 并且在该集合上泛函 $J(u)$ 的极小点可能会对应于边值问题的解.

对于问题 (8.1.1) 而言, 目前所知道的这种“适当好”的集合的最佳选择就是所谓的 Nehari 流形

$$S = \{u \in X : \langle J'(u), u\rangle = 0\},$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 X 与它的对偶空间 X^* 之间的对偶积. 显然 $J(u)$ 的所有临界点都位于 S 中. 后面我们将会看到, 位于 S 上的局部极小点“通常”会是 $J(u)$ 的临界点.

容易看出, $u \in S$ 当且仅当

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x.$$

利用映射 $\phi_u(t) = J(tu)$ $(t>0)$ 的驻点来刻画 Nehari 流形 S 是非常有效的. 这种映射通常称为纤维映射. 还可以看出, 如果 u 是 $J(u)$ 的一个局部极小点, 那么 $\phi_u(t)$ 在 $t=1$ 处取到局部极小值.

定理 8.1.1　*设 $u \in X\setminus\{0\}, t>0$. 那么 $tu \in S$ 当且仅当 $\phi_u'(t)=0$.*

证明　直接利用公式

$$\phi_u'(t) = \langle J'(tu), u\rangle = \frac{1}{t}\langle J'(tu), tu\rangle$$

可得结论. 证毕.

由定理 8.1.1 知, S 中的点对应于映射 $\phi_u(t)$ 的驻点. 自然地把 S 分成 3 个集合 S^+, S^- 和 S^0, 分别对应于纤维映射的局部极小, 局部极大和拐点. 由于

$$\phi_u'(t) = t\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,tu)u\mathrm{d}x,$$

$$\phi_u''(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega f_u(x,tu)u^2\mathrm{d}x,$$

我们定义

$$S^+ = \left\{u\in S: \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - f_u(x,u)u^2\right]\mathrm{d}x > 0\right\},$$

$$S^- = \left\{u\in S: \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - f_u(x,u)u^2\right]\mathrm{d}x < 0\right\},$$

$$S^0 = \left\{u\in S: \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - f_u(x,u)u^2\right]\mathrm{d}x = 0\right\}.$$

按照定义, 有

定理 8.1.2　*假设 $u\in S$. 则*

(1) $\phi_u'(1)=0$;

(2) $\phi_u''(1)>0$, $\phi_u''(1)<0$ 和 $\phi_u''(1)=0$ 分别对应于 $u\in S^+$, $u\in S^-$ 和 $u\in S^0$.

下面的定理说明, 泛函 $J(u)$ 在 S 上的极小点“通常”是它的临界点.

定理 8.1.3　*假设 u_0 是 $J(u)$ 在 S 上的一个局部极小点, 并且 $u_0 \notin S^0$. 那么 $J'(u_0)=0$.*

证明　如果 u_0 是 $J(u)$ 在 S 上的一个局部极小点, 那么 u_0 是优化问题

$$\min_{\gamma(u)=0} J(u)$$

的解, 其中

$$\gamma(u)=\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x.$$

根据 Lagrange 乘子理论知, 存在常数 μ, 使得 $J'(u_0)=\mu\gamma'(u_0)$. 故有

$$\langle J'(u_0),u_0\rangle=\mu\langle\gamma'(u_0),u_0\rangle. \tag{8.1.2}$$

因为 $u_0\in S$, 所以 $\langle J'(u_0),u_0\rangle=0$, 即

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u_0)u_0\mathrm{d}x, \tag{8.1.3}$$

于是

$$\begin{aligned}\langle\gamma'(u_0),u_0\rangle&=2\int_\Omega |\nabla u_0|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f_u(x,u_0)u_0^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u_0)u_0\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega |\nabla u_0|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f_u(x,u_0)u_0^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故当 $u_0\notin S^0$ 时, $\langle\gamma'(u_0),u_0\rangle\neq 0$. 进而由式 (8.1.2) 得 $\mu=0$. 因此 $J'(u_0)=0$. 证毕.

8.2　应　　用

作为应用, 本节讨论边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda a(x)u+b(x)|u|^{p-1}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{8.2.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, $\lambda>0$ 是参数, $1<p<(n+2)/(n-2)$, 函数 $a\in L^\infty(\Omega),b\in C(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 并且 a 和 b 在 Ω 内都可以变号, 但是集合 $\{x\in\Omega:b(x)>0\}$ 的测度大于零. 容易看出: 若 u 是问题 (8.2.1) 的解, 那么 $-u$ 也是它的解; 如果 u 是问题 (8.2.1) 的非平凡解, 那么 u 的正部 u^+ 和负部 u^- 也都是它的解. 利用弱解的强最大值原理 (定理 B.1.9) 可得, 在 Ω 内 $u>0$ 或者 $u<0$. 因此问题 (8.2.1) 的非平凡解一定是正解或负解, 并且正解和负解一一对应.

下面简记 $\|u\|=\|\nabla u\|_2$, 即范数 $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

问题 (8.2.1) 对应的 Euler 泛函是

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

显然, $u \in S$ 当且仅当

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2 - b|u|^{p+1})\mathrm{d}x = 0.$$

由此知 S 是闭集, 并且当 $u \in S$ 时有

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

此外还容易验证

$$\begin{aligned} S^+ &= \left\{u \in S : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x - p\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x > 0\right\} \\ &= \left\{u \in S : (1-p)\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x > 0\right\} \\ &= \left\{u \in S : \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x < 0\right\}. \end{aligned}$$

类似地有

$$S^- = \left\{u \in S : \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x > 0\right\}, \quad S^0 = \left\{u \in S : \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x = 0\right\}.$$

由此推知: 在 S^+ 上 $J_\lambda(u) < 0$, 在 S^- 上 $J_\lambda(u) > 0$, 在 S^0 上 $J_\lambda(u) = 0$.

对应的纤维映射是

$$\phi_u(t) = J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

于是

$$\phi_u'(t) = t\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x - t^p\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

因此当 $\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x$ 与 $\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x$ 同号时, $\phi_u(t)$ 有唯一驻点

$$t(u) := \left(\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-1)},$$

而当 $\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x$ 与 $\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x$ 反号时, $\phi_u(t)$ 没有驻点.

此外还容易证明, 当 $u \in S^-$ 时, $\phi_u(t)$ 在 $t=1$ 处取到最大值; 当 $u \in S^+$ 时, $\phi_u(t)$ 在 $t=1$ 处取到最小值.

定义集合:

$$L^+ = \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \|u\|=1,\ \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x > 0\right\},$$

$$L^- = \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \|u\|=1,\ \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x < 0\right\},$$

$$L^0 = \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \|u\|=1,\ \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x = 0\right\},$$

$$B^+ = \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \|u\|=1,\ \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x > 0\right\},$$

$$B^- = \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \|u\|=1,\ \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x < 0\right\},$$

$$B^0 = \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \|u\|=1,\ \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x = 0\right\}.$$

从上面的分析可以看出: 如果 $u \in L^+ \cap B^+$, 那么 $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_u(t) = -\infty$, 而且当 $t>0$ 适当小时 $\phi_u(t)>0$, $\phi_u'(t)>0$. 这说明 $\phi_u(t)$ 在其唯一驻点 $t(u)$ 处取到最大值, 并且 $t(u)u \in S^-$. 类似地, 如果 $u \in L^- \cap B^-$, 那么 $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_u(t) = \infty$, 而且当 $t>0$ 适当小时 $\phi_u(t)<0$, $\phi_u'(t)<0$, 同时 $\phi_u(t)$ 在其唯一驻点 $t(u)$ 处取到最小值, $t(u)u \in S^+$. 最后, 如果 $u \in L^+ \cap B^-$, 那么 $\phi_u(t)$ 关于 $t>0$ 是严格递增的; 如果 $u \in L^- \cap B^+$, 那么 $\phi_u(t)$ 关于 $t>0$ 是严格递减的.

上面的结果可以总结为下面的定理.

定理 8.2.1 假设 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

(1) *存在常数 c 使得 $cu \in S^-$ 当且仅当* $\dfrac{u}{\|u\|} \in L^+ \cap B^+$;

(2) *存在常数 c 使得 $cu \in S^+$ 当且仅当* $\dfrac{u}{\|u\|} \in L^- \cap B^-$;

(3) *如果 $u \in L^+ \cap B^-$ 或者 $u \in L^- \cap B^+$, 那么对于任意的常数 c, 有 $cu \notin S$.*

问题 (8.2.1) 解的存在性与参数 λ 的范围有关. 下面总假设集合

$$\mathscr{U}_a = \left\{u \in H_0^1(\Omega):\ \int_\Omega a(x)u^2(x)\mathrm{d}x > 0\right\}$$

非空. 由定理 2.6.2 知, 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8.2.2}$$

有正的主特征值 (它还是正特征值中的最小者), 记为 $\lambda_1(a)$, 对应的特征函数记为 ϕ_1. 不妨认为 $\phi_1(x) > 0$.

8.2.1　$\lambda < \lambda_1(a)$ 的情况

从定理 2.6.2 的证明可以看出, 当 $0 < \lambda < \lambda_1(a)$ 时特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda a(x)u = \mu u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8.2.3}$$

的主特征值 $\mu(\lambda) > 0$ (因为 $\mu(0) > 0$ 并且 $\lambda_1(a)$ 是 $\mu(\lambda) = 0$ 的第一个正根). 利用特征值的极小原理知

$$\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 - \lambda a(x)u^2\big)\mathrm{d}x \geqslant \mu(\lambda)\int_\Omega u^2\mathrm{d}x, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{8.2.4}$$

利用反证法易证, 存在常数 $\delta > 0$ 使得

$$\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 - \lambda a(x)u^2\big)\mathrm{d}x \geqslant \delta\|u\|^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{8.2.5}$$

事实上, 如果结论不对, 则存在 $u_m \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, 使得

$$\int_\Omega \big(|\nabla u_m|^2 - \lambda a(x)u_m^2\big)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{m}\|u_m\|^2,$$

即

$$(1 - 1/m)\|u_m\|^2 \leqslant \lambda\int_\Omega a(x)u_m^2\mathrm{d}x. \tag{8.2.6}$$

令$\hat{u}_m = \dfrac{u_m}{\|u_m\|}$, 则 $\|\hat{u}_m\| = 1$, 并且由 Poincaré不等式知, 存在正常数 C 使得 $\|\hat{u}_m\|_2 \leqslant C$ 对所有 m 成立. 故存在 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 的子列仍记为它自身, 以及函数 $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$, 使得在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\hat{u}_m \rightharpoonup \hat{u}$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $\hat{u}_m \longrightarrow \hat{u}$. 同时由式 (8.2.4) 和式 (8.2.6) 知, $\hat{u}_m$ 满足

$$1 \geqslant \lambda\int_\Omega a(x)\hat{u}_m^2\mathrm{d}x + \mu(\lambda)\|\hat{u}_m\|_2^2, \tag{8.2.7}$$

$$1 - \frac{1}{m} \leqslant \lambda\int_\Omega a(x)\hat{u}_m^2\mathrm{d}x. \tag{8.2.8}$$

由于当 $m \longrightarrow \infty$ 时,

$$\left|\int_\Omega a(x)\big(\hat{u}_m^2 - \hat{u}^2\big)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{x\in\Omega}|a(x)|\big(\|\hat{u}_m\|_2 + \|\hat{u}\|_2\big)\|\hat{u}_m - \hat{u}\|_2 \longrightarrow 0,$$

分别在不等式 (8.2.7) 和 (8.2.8) 中令 $m \longrightarrow \infty$, 得

$$1 \geqslant \lambda \int_\Omega a(x)\hat{u}^2 \mathrm{d}x + \mu(\lambda)\|\hat{u}\|_2^2, \quad 1 \leqslant \lambda \int_\Omega a(x)\hat{u}^2 \mathrm{d}x.$$

这是一个矛盾. 因此, 估计式 (8.2.5) 成立.

估计式 (8.2.5) 蕴含 L^- 和 L^0 都是空集, 从而 S^+ 也是空集, $S^0 = \{0\}$. 此外还有 $S^- = \big\{t(u)u : \dot{u} \in B^+\big\}$, $S = S^- \cup \{0\}$.

下面讨论 $J_\lambda(u)$ 在 S^- 上的性质. 显然当 $u \in S^-$ 时, $J_\lambda(u) > 0$. 欲证 $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) > 0$. 假设 $u \in S^-$, 那么 $v = \dfrac{u}{\|u\|} \in L^+ \cap B^+$, 并且 $u = t(v)v$, 其中

$$t(v) = \left(\frac{\displaystyle\int_\Omega \big(|\nabla v|^2 - \lambda a v^2\big)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega b|v|^{p+1}\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-1)}$$

记 $b^* = \sup\limits_{x\in\Omega} b(x)$, $K^{1/(p+1)}$ 是 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ 的 Sobolev 嵌入常数 $(K > 0)$. 那么 $b^* > 0$, 并且

$$\int_\Omega b|v|^{p+1}\mathrm{d}x \leqslant b^* \int_\Omega |v|^{p+1}\mathrm{d}x \leqslant b^* K\|v\|^{p+1} = b^* K. \tag{8.2.9}$$

于是由估计式 (8.2.5) 和 (8.2.9) 得

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) = J_\lambda\big(t(v)v\big) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) t^2(v) \int_\Omega \big(|\nabla v|^2 - \lambda a v^2\big)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega \big(|\nabla v|^2 - \lambda a v^2\big)\mathrm{d}x\right)^{(p+1)/(p-1)}}{\left(\displaystyle\int_\Omega b|v|^{p+1}\mathrm{d}x\right)^{2/(p-1)}} \\
&\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \frac{\delta^{(p+1)/(p-1)}}{\big(b^* K\big)^{2/(p-1)}},
\end{aligned}$$

故 $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) > 0$.

现在证明 $J_\lambda(u)$ 在 S^- 上有极小点并且这个极小点还是 $J_\lambda(u)$ 的临界点, 从而边值问题 (8.2.1) 至少有一个非平凡解. 假设 $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset S^-$ 是一个极小化序列, 即 $\lim\limits_{m\to\infty} J_\lambda(u_m) = \inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u)$, 利用不等式 (8.2.5) 知

$$J_\lambda(u_m) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega \big(|\nabla u_m|^2 - \lambda a u_m^2\big)\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \delta\|u_m\|^2, \tag{8.2.10}$$

这说明$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 故可假设存在 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_m \rightharpoonup u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u_0$. 又因为

$$J_\lambda(u_m) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b|u_m|^{p+1}\mathrm{d}x \leqslant b^* K\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_m\|^{p+1},$$

并且 $p > 1$, 由式 (8.2.10) 便可推得存在 $\varepsilon > 0$, 使 $\|u_m\| \geqslant \varepsilon$ 对所有 m 成立. 再利用式 (8.2.10) 又推知

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\delta\varepsilon^2 &\leqslant \lim_{m\to\infty} J_\lambda(u_m)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b|u_m|^{p+1}\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而 $u_0 \neq 0$. 由不等式 (8.2.5) 得

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2)\mathrm{d}x \geqslant \delta\|u_0\|^2 > 0, \tag{8.2.11}$$

故 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in L^+ \cap B^+$.

我们断言, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u_0$. 如若不然, 由范数的弱下半连续性知 $\|u_0\| < \liminf\limits_{m\to\infty}\|u_m\|$, 从而有

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2 - b|u_0|^{p+1})\mathrm{d}x < \liminf_{m\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_m|^2 - \lambda a u_m^2 - b|u_m|^{p+1})\mathrm{d}x = 0.$$

所以

$$\phi'_{u_0}(1) = \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2 - b|u_0|^{p+1})\mathrm{d}x < 0.$$

利用不等式 (8.2.11) 又知, 对于适当小的 $t > 0$ 有

$$\phi'_{u_0}(t) = t\left(\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2)\mathrm{d}x - t^{p-1}\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x\right) > 0.$$

于是存在 $\alpha > 0$, 使得 $\phi'_{u_0}(\alpha) = 0$. 因此 $\alpha u_0 \in S^-$. 由于 $u_m \in S^-$, 所以 $\phi_{u_m}(t)$ 在 $t = 1$ 处取到最大值, 即

$$J_\lambda(t u_m) = \phi_{u_m}(t) \leqslant \phi_{u_m}(1) = J_\lambda(u_m), \quad \forall\, t > 0.$$

当然有 $J_\lambda(\alpha u_m) \leqslant J_\lambda(u_m)$. 注意到 $\alpha u_m \rightharpoonup \alpha u_0$, $\|u_0\| < \liminf\limits_{m\to\infty}\|u_m\|$, 故有

$$J_\lambda(\alpha u_0) < \liminf_{m\to\infty} J_\lambda(\alpha u_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} J_\lambda(u_m) = \inf_{u\in S^-} J_\lambda(u).$$

这是一个矛盾. 因而在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u_0$.

因为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_m \longrightarrow u_0$, 由

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_m|^2 - \lambda a u_m^2 - b|u_m|^{p+1}\right)\mathrm{d}x = 0$$

推知,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2 - b|u_0|^{p+1}\right)\mathrm{d}x = 0, \tag{8.2.12}$$

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{m\to\infty} J_\lambda(u_m) = \inf_{u\in S^-} J_\lambda(u). \tag{8.2.13}$$

式 (8.2.12) 说明 $u_0 \in S$, 式 (8.2.11) 说明 $u_0 \in S^-$, 式 (8.2.13) 又说明 u_0 是 $J_\lambda(u)$ 在 S^- 上的一个极小点. 根据定理 8.1.3, u_0 是 $J_\lambda(u)$ 的临界点, 因此 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ 是问题 (8.2.1) 的一个非平凡弱解.

至此得到下面的定理.

定理 8.2.2　若 $0 < \lambda < \lambda_1(a)$, 那么问题 (8.2.1) 至少有一个正的弱解.

下面讨论当 $\lambda \longrightarrow \lambda_1(a)^-$ 时问题 (8.2.1) 解的渐近极限. 这里只讨论 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x > 0$ 的情况, 而把 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x < 0$ 的情况留在下节.

定理 8.2.3　假设 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x > 0$. 我们有

(1) $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1(a)^-} \inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) = 0$;

(2) 如果 $\lambda_i \longrightarrow \lambda_1(a)^-$, u_i 是 $J_{\lambda_i}(u)$ 在 S^- 上的极小点, 则 $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 0$.

证明　(1) 不妨假设 $\|\phi_1\| = 1$. 因为 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x > 0$, 所以 $\phi_1 \in B^+$. 又因为 $\lambda < \lambda_1(a)$, 故 $\phi_1 \in L^+$, 从而 $\phi_1 \in L^+ \cap B^+$. 因此 $t(\phi_1)\phi_1 \in S^-$, 其中

$$t(\phi_1) = \left(\frac{\int_\Omega \left(|\nabla \phi_1|^2 - \lambda a\phi_1^2\right)\mathrm{d}x}{\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-1)} = \left(\frac{\left(\lambda_1(a) - \lambda\right)\int_\Omega a\phi_1^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-1)}$$

于是当 $\lambda \longrightarrow \lambda_1(a)^-$ 时,

$$\begin{aligned} J_\lambda\left(t(\phi_1)\phi_1\right) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b\left(t(\phi_1)\phi_1\right)^{p+1}\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\left(\lambda_1(a) - \lambda\right)^{(p+1)/(p-1)} \frac{\left(\int_\Omega a\phi_1^2\mathrm{d}x\right)^{(p+1)/(p-1)}}{\left(\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x\right)^{2/(p-1)}} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

因为 $0 < \inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) \leqslant J_\lambda\big(t(\phi_1)\phi_1\big)$, 从上式推知结论 (1) 成立.

(2) 首先证明序列 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 如若不然, 通过选取子序列, 有 $\|u_i\|\longrightarrow \infty$. 令 $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$, 不妨认为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \rightharpoonup v_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $v_i\longrightarrow v_0$. 因而

$$\lim_{i\to\infty}\int_\Omega a v_i^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega a v_0^2 \mathrm{d}x, \quad \lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x = \int_\Omega b|v_0|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

由结论 (1) 知, 当 $i\longrightarrow\infty$ 时,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega \big(|\nabla u_i|^2 - \lambda_i a u_i^2\big)\mathrm{d}x = J_{\lambda_i}(u_i)\longrightarrow 0,$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x = J_{\lambda_i}(u_i)\longrightarrow 0.$$

上面的两式分别除以 $\|u_i\|^2$ 和 $\|u_i\|^{p+1}$ 得

$$\lim_{i\to\infty}\int_\Omega \big(|\nabla v_i|^2 - \lambda_i a v_i^2\big)\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x = 0.$$

从而有

$$\int_\Omega b|v_0|^{p+1}\mathrm{d}x = 0.$$

如果在 $H_0^1(\Omega)$ 中 v_i 不收敛于 v_0, 那么由范数的弱下半连续性得

$$\int_\Omega \big(|\nabla v_0|^2 - \lambda_1(a) a v_0^2\big)\mathrm{d}x < \lim_{i\to\infty}\int_\Omega \big(|\nabla v_i|^2 - \lambda_i a v_i^2\big)\mathrm{d}x = 0. \tag{8.2.14}$$

因为 $\lambda_1(a)$ 是问题 (8.2.2) 的主特征值, 所以 $\mu = 0$ 是问题 (8.2.3) 对应于 $\lambda = \lambda_1(a)$ 的主特征值. 利用特征值的变分刻画 (极小原理), 我们有

$$\int_\Omega \big(|\nabla \phi|^2 - \lambda_1(a) a\phi^2\big)\mathrm{d}x \geqslant 0, \quad \forall\, \phi\in H_0^1(\Omega). \tag{8.2.15}$$

不等式 (8.2.14) 与不等式 (8.2.15) 相矛盾. 因此在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i\longrightarrow v_0$, 从而

$$\int_\Omega \big(|\nabla v_0|^2 - \lambda_1(a) a v_0^2\big)\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega \big(|\nabla v_i|^2 - \lambda_i a v_i^2\big)\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $\|v_i\| = 1$, 所以 $\|v_0\| = 1$, 故 $v_0 \neq 0$. 这说明 v_0 是问题 (8.2.2) 对应于主特征值 $\lambda_1(a)$ 的特征函数, 于是存在非零常数 k 使得 $v_0 = k\phi_1$. 又因为

$$\int_\Omega b|v_0|^{p+1}\mathrm{d}x = 0, \quad \int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x > 0,$$

所以 $k = 0$, 从而 $v_0 = 0$. 这个矛盾说明序列 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界.

不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \rightharpoonup u_0$. 同于上面关于序列 $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ 的讨论可以推知, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i\longrightarrow u_0$ 并且 $u_0 = 0$. 定理得证.

8.2.2 $\lambda > \lambda_1(a)$ 的情况

如果 $\lambda > \lambda_1(a)$, 则有

$$\int_\Omega \left(|\nabla\phi_1|^2 - \lambda a\phi_1^2\right)\mathrm{d}x = \left(\lambda_1(a) - \lambda\right)\int_\Omega a\phi_1^2\mathrm{d}x < 0,$$

从而 $\phi_1 \in L^-$. 于是当 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x < 0$ 时, $\phi_1 \in L^- \cap B^-$, 因此 S^+ 非空. 在此情况下, S 可能由两个孤立分支构成. 如果能够证明 $J_\lambda(u)$ 在每个分支上都有"适当好"的极小点, 那么问题 (8.2.1) 就至少有两个正解.

引理 8.2.1 假设 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x < 0$. 则存在 $\delta > 0$, 当 $\lambda_1(a) \leqslant \lambda < \lambda_1(a) + \delta$ 时, $(L^0 \cup L^-) \cap \overline{B^+} = \varnothing$.

证明 如果结论不成立, 则存在序列 $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ 和 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, 满足 $\|u_i\| = 1$ 和 $\lambda_i \longrightarrow \lambda_1(a)^+$ 以及

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 - \lambda_i a u_i^2\right)\mathrm{d}x \leqslant 0, \quad \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{8.2.16}$$

因为 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界, 不妨认为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \rightharpoonup u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$.

下面证明在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$. 如若不然, 则有 $\|u_0\| < \liminf\limits_{i\to\infty}\|u_i\|$. 于是

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a)au_0^2\right)\mathrm{d}x < \liminf_{i\to\infty}\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 - \lambda_i a u_i^2\right)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

此与不等式 (8.2.15) 矛盾. 故在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$, 从而 $\|u_0\| = 1$. 再由式 (8.2.16) 得

$$\text{(i)} \quad \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a)au_0^2\right)\mathrm{d}x \leqslant 0, \quad \text{(ii)} \quad \int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

利用 (i) 和 不等式 (8.2.15) 知, 存在常数 k 使得 $u_0 = k\phi_1$. 再利用 (ii) 和假设条件 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x < 0$ 知 $k = 0$. 这与 $\|u_0\| = 1$ 相矛盾. 证毕.

当 $(L^0 \cup L^-) \cap \overline{B^+} = \varnothing$ 时, 我们对 Nehari 流形的结构会有更加深刻的了解. 这就是下面的定理.

定理 8.2.4 假设 $(L^0 \cup L^-) \cap \overline{B^+} = \varnothing$. 我们有

(1) $S^0 = \{0\}$;

(2) $0 \notin \overline{S^-}$, 并且 S^- 是闭的;

(3) S^- 和 S^+ 是分离的, 即 $\overline{S^-} \cap \overline{S^+} = \varnothing$;

(4) S^+ 有界.

证明　(1) 假若 $u_0 \in S^0 \setminus \{0\}$, 则 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in L^0 \cap B^0 \subset L^0 \cap \overline{B^+} = \varnothing$, 这是一个矛盾. 所以 $S^0 = \{0\}$.

(2) 如果结论不对, 则存在 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S^-$, 使得在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow 0$. 于是当 $i \longrightarrow \infty$ 时,

$$0 < \int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

令 $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$. 不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \rightharpoonup v_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $v_i \longrightarrow v_0$. 显然有

$$0 < \int_\Omega \left(|\nabla v_i|^2 - \lambda a v_i^2\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|v_i|^{p+1}\|u_i\|^{p-1}\mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

因此

$$0 = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega \left(|\nabla v_i|^2 - \lambda a v_i^2\right)\mathrm{d}x = 1 - \lambda \lim_{i\to\infty}\int_\Omega a v_i^2\mathrm{d}x = 1 - \lambda\int_\Omega a v_0^2\mathrm{d}x,$$

故 $v_0 \neq 0$. 此外, 利用范数的弱下半连续性还有

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_0|^2 - \lambda a v_0^2\right)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{i\to\infty}\int_\Omega \left(|\nabla v_i|^2 - \lambda_i a v_i^2\right)\mathrm{d}x = 0.$$

这说明 $\dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in L^0 \cup L^-$.

因为 $\displaystyle\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x > 0$, 所以 $\displaystyle\int_\Omega b|v_0|^{p+1}\mathrm{d}x \geqslant 0$, 故 $\dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{B^+}$. 进而得到 $\dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in (L^0 \cup L^-) \cap \overline{B^+}$. 此与假设条件矛盾. 因此 $0 \notin \overline{S^-}$.

由结论 (1) 知 $\overline{S^-} \subset S^- \cup S^0 = S^- \cup \{0\}$. 因为 $0 \notin \overline{S^-}$, 所以 $\overline{S^-} = S^-$, 故 S^- 是闭的.

(3) 由结论 (1) 和 (2) 知

$$\overline{S^-} \cap \overline{S^+} \subset S^- \cap (S^+ \cup S^0) = S^- \cap (S^+ \cup \{0\}) = (S^- \cap S^+) \cup (S^- \cap \{0\}) = \varnothing,$$

因而 S^- 和 S^+ 是分离的.

(4) 若 S^+ 无界, 则存在序列 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S^+$, 使得 $\|u_i\| \longrightarrow \infty$. 按定义有

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x < 0.$$

同上令 $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$, 那么

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_i|^2 - \lambda a v_i^2\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|v_i|^{p+1}\|u_i\|^{p-1}\mathrm{d}x. \tag{8.2.17}$$

不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \rightharpoonup v_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $v_i \longrightarrow v_0$. 由于 $\int_\Omega (|\nabla v_i|^2 - \lambda a v_i^2)\mathrm{d}x$ 关于 i 有界, 并且 $\|u_i\| \longrightarrow \infty$, $p > 1$, 从式 (8.2.17) 可推知

$$\int_\Omega b|v_0|^{p+1}\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x = 0.$$

同上可以证明在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \longrightarrow v_0$, 因而 $\|v_0\| = 1$, 故 $v_0 \in B^0$. 进而有 $v_0 \in \overline{B^+}$, 见习题 8.2. 此外还有

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda a v_0^2)\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega (|\nabla v_i|^2 - \lambda_i a v_i^2)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

于是 $v_0 \in L^0 \cup L^-$. 因此 $v_0 \in (L^0 \cup L^-) \cap \overline{B^+} = \varnothing$, 矛盾. 所以 S^+ 有界. 证毕.

当 S^- 和 S^+ 分离并且 $S^0 = \{0\}$ 时, $J_\lambda(u)$ 在 S^- (或者 S^+) 上的非零极小点也是 $J_\lambda(u)$ 在 S 上的局部极小点, 因此这些极小点是 $J_\lambda(u)$ 在 S 上的临界点, 从而是问题 (8.2.1) 的非平凡解. 我们先讨论 S^-.

定理 8.2.5 假设 $(L^0 \cup L^-) \cap \overline{B^+} = \varnothing$. 则有

(1) $J_\lambda(u)$ 在 S^- 上的极小化序列是有界的;

(2) $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) > 0$;

(3) $J_\lambda(u)$ 在 S^- 上存在极小点.

证明 首先, 由假设条件和习题 8.2 易知 $L^0 \cap B^0 = \varnothing, L^- \cap B^0 = \varnothing$.

(1) 假设 $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset S^-$ 是 $J_\lambda(u)$ 的一个极小化序列, 那么存在非负常数 c, 使得

$$\int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x \longrightarrow c. \tag{8.2.18}$$

如果 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 无界, 即 $\|u_i\| \longrightarrow \infty$. 同上令 $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$, 不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \rightharpoonup v_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $v_i \longrightarrow v_0$. 由式 (8.2.18) 得

$$\int_\Omega (|\nabla v_i|^2 - \lambda a v_i^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|v_i|^{p+1}\|u_i\|^{p-1}\mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

因为 $\|u_i\| \longrightarrow \infty$, $p > 1$, 所以

$$\int_\Omega b|v_0|^{p+1}\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x = 0.$$

如果在 $H_0^1(\Omega)$ 中 v_i 不收敛于 v_0, 那么由范数的弱下半连续性得

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda a v_0^2)\mathrm{d}x < \lim_{i\to\infty}\int_\Omega (|\nabla v_i|^2 - \lambda a v_i^2)\mathrm{d}x = 0.$$

由此知 $v_0 \neq 0$, 并且 $\dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in L^- \cap B^0$. 得到一个矛盾. 故在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \longrightarrow v_0$. 从而有 $\|v_0\| = 1$, 并且

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda a v_0^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|v_0|^{p+1}\mathrm{d}x = 0.$$

这说明 $v_0 \in L^0 \cap B^0$, 与已知条件矛盾. 因而 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 有界.

(2) 因为在 S^- 上 $J_\lambda(u) > 0$, 所以 $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) \geqslant 0$. 如果 $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) = 0$, 取 $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset S^-$ 是一个极小化序列, 那么

$$\int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} J_\lambda(u_i) \longrightarrow 0.$$

由结论 (1) 知序列 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 有界, 故可认为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \rightharpoonup u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$. 同于结论 (1) 中关于序列 $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ 的讨论便可推知, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$. 根据定理 8.2.4, $0 \notin \overline{S^-}$, 所以 $u_0 \neq 0$. 同于结论 (1) 的证明, 有 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in L^0 \cap B^0 = \varnothing$. 这是一个矛盾.

(3) 取 $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset S^-$ 是 $J_\lambda(u)$ 的一个极小化序列. 那么

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_i) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &\to \inf_{u\in S^-} J_\lambda(u) > 0, \end{aligned}$$

因此

$$\int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x \longrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} \inf_{u\in S^-} J_\lambda(u) > 0.$$

由结论 (1) 知 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 有界. 不妨认为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \rightharpoonup u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$. 于是

$$\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x > 0.$$

这说明 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in B^+$. 因为 $(L^0 \cup L^-) \cap B^+ = \varnothing$, 所以 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in B^+ \subset L^+$. 从而 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in L^+ \cap B^+$,

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2)\mathrm{d}x > 0.$$

进而得到 $t(u_0)u_0 \in S^-$, 其中

$$t(u_0) = \left(\frac{\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2)\mathrm{d}x}{\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x} \right)^{1/(p-1)}$$

现在证明在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$. 如若不然, 同上可知

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2)\mathrm{d}x &< \lim_{i\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{i\to\infty} \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故有 $t(u_0) < 1$. 由于 $t(u_0)u_i \longrightarrow t(u_0)u_0$, 并且映射 $t \longmapsto J_\lambda(tu_i)$ 在 $t = 1$ 处取到最大值, 所以

$$J_\lambda(t(u_0)u_0) < \liminf_{i\to\infty} J_\lambda(t(u_0)u_i) \leqslant \lim_{i\to\infty} J_\lambda(u_i) = \inf_{u\in S^-} J_\lambda(u).$$

这是一个矛盾. 因而在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$.

容易推出

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2) = \int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x,$$

由此知 $u_0 \in S$. 又因为 $\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x > 0$, 所以 $u_0 \in S^-$. 此外还有

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{i\to\infty} J_\lambda(u_i) = \inf_{u\in S^-} J_\lambda(u).$$

这说明 u_0 是 $J_\lambda(u)$ 在 S^- 上的一个极小点. 定理得证.

下面讨论 S^+.

定理 8.2.6 假设 $L^- \neq \varnothing$, $L^- \cap \overline{B^+} = \varnothing$. 那么 $J_\lambda(u)$ 在 S^+ 上有极小点.

证明 由已知条件, $L^- \cap B^- = L^- \neq \varnothing$, 所以 $S^+ \neq \varnothing$. 记 $b_0 = \inf_{x\in\Omega} b(x)$. 由于 $S^+ \neq \varnothing$, 故 $b_0 < 0$. 又因为 S^+ 有界, 故存在正常数 M, 使得 $\|u\| \leqslant M$ 对所有 $u \in S^+$ 成立. 根据 Sobolev 不等式, 对于任给的 $u \in S^+$, 有

$$\begin{aligned}J_\lambda(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) b_0 \int_\Omega |u|^{p+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right) b_0 K \|u\|^{p+1}$$
$$\geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right) b_0 K M^{p+1}.$$

这说明$J_\lambda(u)$ 在 S^+ 上下方有界, 故 $\inf\limits_{u\in S^+} J_\lambda(u)$ 存在. 显然有 $\inf\limits_{u\in S^+} J_\lambda(u)<0$. 假设 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S^+$ 是 $J_\lambda(u)$ 的一个极小化序列, 那么当 $i\longrightarrow\infty$ 时,

$$J_\lambda(u_i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (|\nabla u_i|^2-\lambda a u_i^2)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x$$
$$\to \inf_{u\in S^+} J_\lambda(u)<0.$$

因为 S^+ 有界, 不妨认为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i\rightharpoonup u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $u_i\longrightarrow u_0$. 于是

$$\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x=\lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x<0,$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2-\lambda a u_0^2)\mathrm{d}x\leqslant \lim_{i\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_i|^2-\lambda a u_i^2)\mathrm{d}x<0.$$

因而 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|}\in L^-\cap B^-$, 进而又有 $t(u_0)u_0\in S^+$.

再证明在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i\longrightarrow u_0$. 如若不然, 则有

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2-\lambda a u_0^2)\mathrm{d}x<\lim_{i\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_i|^2-\lambda a u_i^2)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x,$$

因此

$$t(u_0)=\left(\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u_0|^2-\lambda a u_0^2)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-1)}>1.$$

从而

$$J_\lambda\big(t(u_0)u_0\big)\leqslant J_\lambda(u_0)<\lim_{i\to\infty} J_\lambda(u_i)=\inf_{u\in S^+} J_\lambda(u),$$

这是一个矛盾. 故在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$, 进而推出

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x < 0.$$

这说明 $u_0 \in S^+$, 并且

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{i\to\infty} J_\lambda(u_i) = \inf_{u\in S^+} J_\lambda(u).$$

所以 u_0 是 $J_\lambda(u)$ 在 S^+ 上的一个极小点. 证毕.

推论 8.2.1 *假设* $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x < 0$. *则存在* $\delta > 0$, *当* $\lambda_1(a) < \lambda < \lambda_1(a) + \delta$ *时问题* (8.2.1) *至少有两个正解.*

证明 根据引理 8.2.1, 存在 $\delta > 0$, 当 $\lambda_1(a) < \lambda < \lambda_1(a)+\delta$ 时, $(L^0\cup L^-)\cap\overline{B^+} = \varnothing$. 因为 $\lambda > \lambda_1(a)$, 所以 $\phi_1 \in L^-$. 由定理 8.2.5 和定理 8.2.6, $J_\lambda(u)$ 分别在 S^- 和 S^+ 上有极小点. 再根据定理 8.2.4, S^- 和 S^+ 是分离的并且 $S^0 = \{0\}$. 因此这些极小点至少有两个, 它们都是 $J_\lambda(u)$ 在 S 上的局部极小点并且不属于 S^0. 利用定理 8.1.3, 这些极小点都是问题 (8.2.1) 的非平凡解. 所以问题 (8.2.1) 至少有两个正解. 证毕.

定理 8.2.7 *假设* $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x < 0$, $\lambda_i \longrightarrow \lambda_1^+(a)$, $u_i \in S^+$ *是* $\lambda = \lambda_i$ *时* $J_\lambda(u)$ *的临界点 (不妨认为* $u_i > 0$*). 那么*

(1) $u_i \longrightarrow 0$;

(2) *在* $H_0^1(\Omega)$ *中* $\dfrac{u_i}{\|u_i\|} \longrightarrow \phi_1$.

证明 (1) 因为 $u_i \in S^+$ 是 $J_{\lambda_i}(u)$ 的临界点, 所以

$$\int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda_i a u_i^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x < 0.$$

又因为 S^+ 有界, 故 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 有界. 不妨认为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \rightharpoonup u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$. 再证明在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$. 如若不然, 则有

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a) a u_0^2)\mathrm{d}x < \liminf_{i\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda_i a u_i^2)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

此与不等式 (8.2.15) 矛盾. 因此在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow u_0$, 进而有

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a) a u_0^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|u_0|^{p+1}\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

再利用不等式 (8.2.15) 得

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a) a u_0^2)\mathrm{d}x = 0,$$

从而存在常数 k, 使得 $u_0 = k\phi_1$. 由 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x < 0$ 推知 $k = 0$. 故在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_i \longrightarrow 0$.

(2) 令 $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$. 不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \rightharpoonup v_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^{p+1}(\Omega)$ 中 $v_i \longrightarrow v_0$. 显然有

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_i|^2 - \lambda_i a v_i^2\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega b|v_i|^{p+1}\|u_i\|^{p-1}\mathrm{d}x.$$

因为 $\|u_i\| \longrightarrow 0, p > 1$, 所以

$$\lim_{i\to\infty}\int_\Omega \left(|\nabla v_i|^2 - \lambda_i a v_i^2\right)\mathrm{d}x = 0.$$

同上可证在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_i \longrightarrow v_0$. 因而 $\|v_0\| = 1$,

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_0|^2 - \lambda_1(a) a v_0^2\right)\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $v_i > 0$, 故 $v_0 \geqslant 0$, 因而 $v_0 = \phi_1$. 定理得证.

8.2.3 不存在性

我们将在适当的条件下, 探讨 Nehari 流形的进一步性质和问题 (8.2.1) 只有零解的原因.

首先假设 $\int_\Omega b(x)\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x > 0$. 则当 λ 适当地比 $\lambda_1(a)$ 大时, $\phi_1 \in L^- \cap B^+$. 与引理 8.2.1 的证明类似, 存在 $\delta > 0$, 当 $\lambda_1(a) \leqslant \lambda < \lambda_1(a) + \delta$ 时, $\overline{L^-} \subset B^+$. 相应地 $L^- \cap B^-$ 和 S^+ 都是空集. 另一方面, 集合 S^- 非空. 然而从下面的定理和推论可以看出, 在 S^- 中问题 (8.2.1) 没有非平凡解.

定理 8.2.8 假设 $L^- \cap B^+ \neq \varnothing$, 则 $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) = 0$.

证明 假设 $u \in L^- \cap B^+$. 可选择合适的 $h \in H_0^1(\Omega)$, 它的最大模范数足够小, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数足够大, 使得

(1) $\int_\Omega \left(|\nabla(u+h)|^2 - \lambda a|u+h|^2\right)\mathrm{d}x > 0$,

(2) $\int_\Omega b|u+\varepsilon h|^{p+1}\mathrm{d}x > \dfrac{1}{2}\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x, \quad \forall\, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

对于 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, 令

$$u_\varepsilon = \frac{u+\varepsilon h}{\|u+\varepsilon h\|},$$

则 $u_0 \in L^-$, $u_1 \in L^+$. 由连续性知, 存在 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 使得 $u_{\varepsilon_0} \in L^0$. 进一步, 存在序列 $\{u_i\} \subset L^+ \cap B^+$ (其中 $u_i = u_{\varepsilon_i}$), 使得

$$\int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2)\mathrm{d}x \longrightarrow 0,$$

$$\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\|u+\varepsilon_i h\|^{p+1}}\int_\Omega b|u+\varepsilon_i h|^{p+1}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{1}{2(\|u\|+\|h\|)^{p+1}}\int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x,$$

于是

$$\lim_{i\to\infty} t(u_i) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u_i|^2 - \lambda a u_i^2)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-1)} = 0,$$

进而得到

$$J_\lambda(t(u_i)u_i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) t^{p+1}(u_i)\int_\Omega b|u_i|^{p+1}\mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

因为 $t(u_i)u_i \in S^-$, 所以 $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) = 0$. 证毕.

推论 8.2.2　假设 $\int_\Omega b\phi_1^{p+1}\mathrm{d}x > 0$. 则当 $\lambda > \lambda_1(a)$ 时, $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) = 0$.

证明　由于

$$\int_\Omega (|\nabla \phi_1|^2 - \lambda a \phi_1^2)\mathrm{d}x = (\lambda_1(a) - \lambda)\int_\Omega a\phi_1^2\mathrm{d}x,$$

故当 $\lambda > \lambda_1(a)$ 时, $\phi_1 \in L^-$, 从而 $\phi_1 \in L^- \cap B^+$. 直接由定理 8.2.8 可得结论. 证毕.

推论 8.2.3　假设存在 $u \in H_0^1(\Omega)$, 满足

$$\int_\Omega a u^2\mathrm{d}x > 0, \qquad \int_\Omega b|u|^{p+1}\mathrm{d}x > 0.$$

则存在 λ^*, 当 $\lambda > \lambda^*$ 时有 $\inf\limits_{u\in S^-} J_\lambda(u) = 0$.

证明　取 λ^* 适当大, 使得

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)\mathrm{d}x < 0, \quad \forall\, \lambda > \lambda^*.$$

所以当 $\lambda > \lambda^*$ 时, 有 $\dfrac{u}{\|u\|} \in L^- \cap B^+$. 由定理 8.2.8 知结论成立. 证毕.

定理 8.2.9　如果 $L^- \cap B^0 \neq \varnothing$, 则 $J_\lambda(u)$ 在 S^+ 上无界.

证明　取 $u \in L^- \cap B^0$. 对于给定的适当小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $v \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\|v\|=1,\quad \|u-v\|<\varepsilon,\quad -\varepsilon<\int_\Omega b|v|^{p+1}\mathrm{d}x<0,$$

$$\int_\Omega \left(|\nabla v|^2-\lambda a v^2\right)\mathrm{d}x<\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\lambda a u^2\right)\mathrm{d}x<0.$$

事实上, 只要在集合 $\{x\in\Omega: b(x)\leqslant 0\}$ 上取 $v=u$, 在集合 $\{x\in\Omega: b(x)>0\}$ 上取 v 比 u 适当小即可. 故存在 $\delta>0$ 和序列 $\{v_i\}_{i=1}^\infty\subset L^-\cap B^-$, 使得

$$\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x<0,\ \lim_{i\to\infty}\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x=0,\ \int_\Omega\left(|\nabla v_i|^2-\lambda a v_i^2\right)\mathrm{d}x<-\delta. \tag{8.2.19}$$

于是 $t(v_i)v_i\in S^+$, 并且

$$\lim_{i\to\infty}t(v_i)=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\displaystyle\int_\Omega\left(|\nabla v_i|^2-\lambda a v_i^2\right)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega b|v_i|^{p+1}\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-1)}=\infty. \tag{8.2.20}$$

结合式 (8.2.19) 和 (8.2.20) 得

$$\begin{aligned}J_\lambda\big(t(v_i)v_i\big)&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)t^2(v_i)\int_\Omega\left(|\nabla v_i|^2-\lambda a v_i^2\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant-\delta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)t^2(v_i)\longrightarrow-\infty.\end{aligned}$$

因而 $J_\lambda(u)$ 在 S^+ 上无界. 证毕.

Nehari 流形方法也可用于研究方程组的边值问题, 有兴趣的读者请参看文献 [34].

Nehari 流形方法源于纤维方法. 前苏联的 S. I. Pohozaev 于 1990 年首次建立了纤维方法 [35]. 限于篇幅, 这里不再介绍纤维方法, 有兴趣的读者可参看文献 [35~37].

习　题　8

8.1　给出定理 8.2.1 的严格证明.

8.2　证明 $B^0\subset\partial B^+, B^0\subset\partial B^-$.

8.3　补证定理 8.2.5 (2) 的证明过程中的断言 $\dfrac{u_0}{\|u_0\|}\in L^0\cap B^0$.

第 9 章　p-Laplace 方程

因为当 $\nabla u = 0$ 时, p-Laplace 方程是一个退化的 $(p > 2)$ 或者具有奇性的 $(p < 2)$ 拟线性方程, 所以它的性质与半线性方程有重要差别. 半线性方程的许多重要性质对于 p–Laplace 方程而言不一定成立. 本章讨论 p–Laplace 方程的边值问题

$$-\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \tag{9.1}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界光滑区域, $p > 1$, $a(x) \in L^\infty(\Omega)$.

按如下方式定义算子 $-\Delta_p$:

$$\langle -\Delta_p u, \phi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \phi \in W^{1,p}(\Omega),$$

那么

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \quad 其中\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

简记 $\mathscr{L}_p u = -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$.

对于 $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, 函数 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 称为方程

$$\mathscr{L}_p u = f(x)$$

的弱解, 如果

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi + a(x)|u|^{p-2}u\phi\right]\mathrm{d}x = \int_\Omega f\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{9.2}$$

若对于所有的非负检验函数 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 上式中的等号都成为不等号 $\geqslant$ $(\leqslant)$, 则称 u 为弱上解 (弱下解).

下面我们只考虑 $f \in L^\infty(\Omega)$ 的情形. 称算子 $\mathscr{L}_p$ 满足最大值原理, 如果当 $f \geqslant 0$ 时, 问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_p u = f(x), & x \in \Omega, \\ u \geqslant 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.3}$$

的每一个弱解都满足 $u \geqslant 0$. 称算子 $\mathscr{L}_p$ 满足强最大值原理, 如果当 $f \geqslant 0, \neq 0$ 时, 问题 (9.3) 的每一个弱解都满足 $u|_\Omega > 0$, 并且边界点引理 (Hopf 引理) 成立. 称算子 $\mathscr{L}_p$ 满足弱比较原理, 如果对于任何 $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$, 由 $\mathscr{L}_p u_1 \leqslant \mathscr{L}_p u_2$ $(x \in \Omega)$, $u_1 \leqslant u_2$ $(x \in \partial\Omega)$ 可以推出 $u_1 \leqslant u_2$ $(x \in \Omega)$.

最大值原理与比较原理成立与否, 取决于算子 $\mathscr{L}_p$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的主特征值 $\lambda_{1,p}(a)$ 的符号, 其中 $\lambda_{1,p}(a)$ 可以按照如下方式确定:

$$\lambda_{1,p}(a)=\inf\left\{\int_\Omega\left[|\nabla u|^p+a(x)|u|^p\right]\mathrm{d}x:\ u\in W_0^{1,p}(\Omega),\ \int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x=1\right\}. \tag{9.4}$$

当 $a=0$ 时, 通常简记 $\lambda_{1,p}(0)=\lambda_{1,p}$.

9.1　解的正则性、强最大值原理与 Harnack 不等式

本节不加证明地给出三个结果, 一个是解的正则性, 另一个是强最大值原理, 再一个是 Harnack 不等式.

命题 9.1.1 (解的正则性 [38])　*假设 $a,f\in L^\infty(\Omega)$, $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 是边值问题*

$$\begin{cases}\mathscr{L}_pu=f(x), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{9.1.1}$$

的解. 则 $u\in C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$, $0<\alpha<1$.

命题 9.1.2 (强最大值原理 [39])　*假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域, 非负函数 $u\in C^1(\Omega)$ 满足 $\Delta_pu\in L^2_{\rm loc}(\Omega)$, 在 Ω 内 $-\Delta_pu+\beta(u)\geqslant 0$ 几乎处处成立. 又设函数 $\beta:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续、非减, $\beta(0)=0$, 并且*

(1) 存在 $s>0$ 使得 $\beta(s)=0$, 或者

(2) 在 $(0,\infty)$ 上 $\beta(s)>0$ 并且 $\displaystyle\int_0^1(\beta(s)s)^{-1/p}\mathrm{d}s=\infty$.

如果 u 在 Ω 内不恒为零, 则 u 在 Ω 内是恒正的. 此外, 如果存在 $x_0\in\partial\Omega$, 使得 $u\in C^1(\Omega\cup\{x_0\})$, $u(x_0)=0$, 则 $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{x_0}<0$.

Trudinger 在文献 [40] 中讨论了一般形式的拟线性椭圆型方程的非负解的 Harnack 不等式. 考虑散度型拟线性方程

$$\mathrm{div}A(x,u,\nabla u)+B(x,u,\nabla u)=0. \tag{9.1.2}$$

假设 A 和 B 满足下面的结构性条件:

对于任给的正常数 M, 总存在仅依赖于 M 的常数 $p>1$ 和 $A_0,B_0>0$, 使得对于所有的 $(x,u,\eta)\in\Omega\times(-M,M)\times\mathbb{R}^n$, 下面的不等式成立:

$$\begin{aligned}&|A(x,u,\eta)|\leqslant A_0\big(|\eta|^{p-1}+|u|^{p-1}+1\big),\\ &\eta\cdot A(x,u,\eta)\geqslant|\eta|^p-A_0\big(|u|^p+1\big),\\ &|B(x,u,\eta)|\leqslant B_0\big(|\eta|^p+|u|^{p-1}+1\big).\end{aligned}$$

函数 $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 称为方程 (9.1.2) 的弱解 (弱上解, 弱下解), 如果对于任意具有紧支集的 $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$, 都有

$$\int_{\Omega} \left[\nabla\phi \cdot A(x,u,\nabla u) - \phi B(x,u,\nabla u)\right] \mathrm{d}x = 0 \ (\geqslant 0,\ \leqslant 0).$$

对于常数 $R > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$, 用 $K_x(R)$ 表示以 x 为中心、边长为 R 并且边平行于坐标轴的立方体, 通常略去下标 x 而简记为 $K(R)$.

命题 9.1.3 (Harnack 不等式 [40]) 假设 $K(3R) \subset \Omega$, u 是方程 (9.1.2) 的非负弱解, 并且 $u \leqslant M$ 在 $K(3R)$ 内成立. 则存在仅依赖于 p, A_0, B_0, n, M 和 R 的正常数 C, 使得

$$\sup_{K(R)} u \leqslant C \inf_{K(R)} u.$$

命题 9.1.4 (Harnack 不等式 [40]) 假设 $K(3R) \subset \Omega$, u 是方程 (9.1.2) 的非负弱上解, 并且 $u \leqslant M$ 在 $K(3R)$ 内成立. 则存在仅依赖于 p, A_0, B_0, n, M 和 R 的正常数 C, 使得

$$R^{-n/q}\|u\|_{L^q(K(2R))} \leqslant C \inf_{K(R)} u,$$

这里当 $p < n$ 时, $q < n(p-1)/(n-p)$, 而当 $p \geqslant n$ 时, $q \leqslant \infty$.

命题 9.1.5 (Harnack 不等式 [40]) 假设 $K(3R) \subset \Omega$, u 是方程 (9.1.2) 的非负弱下解, 并且 $u \leqslant M$ 在 $K(3R)$ 内成立. 则存在仅依赖于 p, A_0, B_0, n, M 和 R 的正常数 C, 使得

$$\sup_{K(R)} u \leqslant CR^{-n/q}\|u\|_{L^q(K(2R))}, \quad \forall\, q > p-1.$$

容易看出, 方程 (9.1) 是方程 (9.1.2) 的一个特殊情况. 对函数 $f(x,u)$ 附加适当的条件, Harnack 不等式对于方程 (9.1) 也成立.

9.2 特征值问题

先证明几个后面多次被用到的引理.

引理 9.2.1 对于定义在集合

$$\mathscr{D}(I) = \left\{u, v \in W^{1,p}_0(\Omega) : u, v \geqslant 0,\ u/v, v/u \in L^\infty(\Omega)\right\}$$

上的泛函

$$I(u,v) = \left\langle -\Delta_p u, \frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right\rangle - \left\langle -\Delta_p v, \frac{u^p - v^p}{v^{p-1}} \right\rangle,$$

我们有 $I(u,v) \geqslant 0$, 并且 $I(u,v) = 0$ 当且仅当存在 $c > 0$, 使得 $v = cu$ 几乎处处成立.

在证明引理 9.2.1 之前, 我们先证明一个初等不等式.

引理 9.2.2 设 $p>1$, 并记 $(2-p)^+=\max\{2-p,0\}$,

$$c(p)=\begin{cases}[3p(p-1)]/16, & \text{当 } 1<p<2 \text{ 时},\\ 1/(2^{p-1}-1), & \text{当 } p\geqslant 2 \text{ 时}.\end{cases}$$

则对于任意向量 $v_1, v_2\in\mathbb{R}^n$, 成立

$$|v_2|^p-|v_1|^p\geqslant p|v_1|^{p-2}v_1\cdot(v_2-v_1)+c(p)\frac{|v_2-v_1|^{p+(2-p)^+}}{(|v_1|+|v_2|)^{(2-p)^+}}.$$

证明 首先讨论 $p\geqslant 2$ 的情况. 由于 $v\longmapsto|v|^p$ 是一个严格凸函数, 所以

$$|v_2|^p\geqslant|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot(v_2-v_1).$$

用 $(v_1+v_2)/2$ 代替上式中的 v_2 得

$$\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p\geqslant|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot\frac{v_2-v_1}{2}.$$

又 $p\geqslant 2$, 利用 Clarkson 不等式 (见习题 9.1), 我们有

$$\begin{aligned}|v_1|^p+|v_2|^p&\geqslant 2\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p+2\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p\\&\geqslant 2|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot(v_2-v_1)+2\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p.\end{aligned}$$

由此推出

$$|v_2|^p\geqslant|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot(v_2-v_1)+2^{1-p}|v_2-v_1|^p. \tag{9.2.1}$$

用 $(v_1+v_2)/2$ 代替式 (9.2.1) 中的 v_2 又得

$$\begin{aligned}\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p&\geqslant|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot\left(\frac{v_1+v_2}{2}-v_1\right)+2^{1-p}\left|v_1-\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p\\&=|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot\frac{v_2-v_1}{2}+2^{1-2p}|v_1-v_2|^p.\end{aligned}$$

再次利用 Clarkson 不等式, 有

$$\begin{aligned}|v_1|^p+|v_2|^p&\geqslant 2\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|^p+2\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p\\&\geqslant 2|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot(v_2-v_1)+4^{1-p}|v_1-v_2|^p+2\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^p.\end{aligned}$$

化简上式得

$$|v_2|^p\geqslant|v_1|^p+p|v_1|^{p-2}v_1\cdot(v_2-v_1)+(2^{1-p}+4^{1-p})|v_2-v_1|^p.$$

重复以上步骤便可推出

$$|v_2|^p \geqslant |v_1|^p + p|v_1|^{p-2}v_1 \cdot (v_2 - v_1) + (2^{1-p} + 4^{1-p} + 8^{1-p} + \cdots)|v_2 - v_1|^p.$$

利用

$$2^{1-p} + 4^{1-p} + 8^{1-p} + \cdots = \frac{1}{2^{p-1} - 1}$$

即得所证结论.

下面讨论 $1 < p < 2$ 的情况. 给定 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$f(t) = |v_1 + t(v_2 - v_1)|^p, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

若对于任意的 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 都有 $v_1 + t(v_2 - v_1) \neq 0$, 那么 $f''(t)$ 在 $[0,1]$ 上有定义, 并且

$$\begin{aligned} f''(t) =& p(p-2)|v_1 + t(v_2 - v_1)|^{p-2}|v_2 - v_1|^2 \\ &+ p|v_1 + t(v_2 - v_1)|^{p-2}|v_2 - v_1|^2 \\ =& p(p-1)|v_1 + t(v_2 - v_1)|^{p-2}|v_2 - v_1|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

利用

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t)f''(t)\mathrm{d}t,$$

得

$$|v_2|^p = |v_1|^p + p|v_1|^{p-2}v_1 \cdot (v_2 - v_1) + \int_0^1 (1-t)f''(t)\mathrm{d}t. \tag{9.2.2}$$

因为 $|v_1 + t(v_2 - v_1)| \leqslant |v_1| + |v_2|$, $p < 2$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)f''(t)\mathrm{d}t \geqslant& \int_0^{\frac{1}{4}} (1-t)f''(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} f''(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} p(p-1)|v_1 + t(v_2 - v_1)|^{p-2}|v_2 - v_1|^2\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} p(p-1)(|v_1| + |v_2|)^{p-2}|v_2 - v_1|^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{16}p(p-1)\frac{|v_2 - v_1|^2}{(|v_1| + |v_2|)^{2-p}}. \end{aligned}$$

再由式 (9.2.2) 立得

$$|v_2|^p \geqslant |v_1|^p + p|v_1|^{p-2}v_1 \cdot (v_2 - v_1) + \frac{3p(p-1)}{16}\frac{|v_2 - v_1|^2}{(|v_1| + |v_2|)^{2-p}}.$$

结论成立.

若存在 $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$ 使得 $v_1 + t_0(v_2 - v_1) = 0$, 可直接验证结论成立, 留作习题. 证毕.

引理 9.2.1 的证明 直接计算知

$$I(u,v) = \int_\Omega \left[|\nabla u|^p - \left(\frac{u}{v}\right)^p |\nabla v|^p + p\left(\frac{u}{v}\right)^p |\nabla v|^p - p\left(\frac{u}{v}\right)^{p-1} |\nabla v|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \right.$$

$$\left. + |\nabla v|^p - \left(\frac{v}{u}\right)^p |\nabla u|^p + p\left(\frac{v}{u}\right)^p |\nabla u|^p - p\left(\frac{v}{u}\right)^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \right] \mathrm{d}x.$$

记

$$v_2 = \nabla u, \quad v_1 = \frac{u}{v}\nabla v, \quad z_2 = \nabla v, \quad z_1 = \frac{v}{u}\nabla u,$$

并利用引理 9.2.2, 我们有

$$\begin{aligned} I(u,v) = &\int_\Omega \big(|v_2|^p - |v_1|^p - p|v_1|^{p-2}(v_2 - v_1)\cdot v_1 \\ &+ |z_2|^p - |z_1|^p - p|z_1|^{p-2}(z_2 - z_1)\cdot z_1\big)\mathrm{d}x \\ \geqslant &\int_\Omega c(p)\left(\frac{|v_2 - v_1|^{p+(2-p)^+}}{(|v_1| + |v_2|)^{(2-p)^+}} + \frac{|z_2 - z_1|^{p+(2-p)^+}}{(|z_1| + |z_2|)^{(2-p)^+}} \right)\mathrm{d}x \geqslant 0. \end{aligned}$$

如果 $I(u,v) = 0$, 则 $v_1 = v_2$, $z_1 = z_2$, 即 $\dfrac{1}{u}\nabla u = \dfrac{1}{v}\nabla v$. 令

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : v(x) > 0\}.$$

由于 $u/v, v/u \in L^\infty(\Omega)$, 故 $|\Omega_1 \setminus \Omega_2| = |\Omega_2 \setminus \Omega_1| = 0$. 因为在 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 上 $u, v > 0$, 所以 $\nabla \ln u = \nabla \ln v$, 故存在常数 $c > 0$ 使得 $u = cv$. 注意到

$$\Omega_1 = (\Omega_1 \setminus \Omega_2) \cup (\Omega_1 \cap \Omega_2), \quad \Omega_2 = (\Omega_2 \setminus \Omega_1) \cup (\Omega_1 \cap \Omega_2),$$

并且 $|\Omega_1 \setminus \Omega_2| = |\Omega_2 \setminus \Omega_1| = 0$, 因此 $|\Omega_1| = |\Omega_2|$. 又因为在 $\Omega \setminus \Omega_1$ 上 $u = 0$, 在 $\Omega \setminus \Omega_2$ 上 $v = 0$, 所以 $u = cv$ 几乎处处成立. 证毕.

引理 9.2.3 在函数集

$$\mathscr{D}(I) = \left\{u, v \in W^{1,p}(\Omega) : u, v \geqslant 0, u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}, u/v, v/u \in L^\infty(\Omega)\right\}$$

中研究上面的泛函 $I(u,v)$. 那么引理 9.2.1 的结论仍然成立.

证明留作习题.

定理 9.2.1 假设 $a \in L^\infty(\Omega)$. 那么特征值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_p u = \lambda |u|^{p-2} u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.2.3}$$

存在唯一特征值 $\lambda = \lambda_{1,p}(a)$ 对应于正特征函数 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 并且 $\lambda_{1,p}(a)$ 可以按照式 (9.4) 的方式确定. 同时 $\lambda_{1,p}(a)$ 还是简单和孤立的, 正特征函数 $\phi \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$,

$0<\beta<1$, 并且满足 $\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}<0$. 同于第 1 章, 我们称具有这种性质的特征值为**主特征值**或**第一特征值**.

证明 若取一个适当大的正常数 M, 用 $a(x)+M$ 代替 $a(x)$, 那么不妨认为 $a(x)\geqslant 0$. 易证泛函

$$J(u)=\int_\Omega\left(|\nabla u|^p+a(x)|u|^p\right)\mathrm{d}x$$

在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上是弱下半连续的, 在

$$\mathscr{V}=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega):\|u\|_p=1\right\}$$

上是强制的. 根据推论 1.2.1 知, 存在 $\phi_1\in\mathscr{V}$ 使得

$$\lambda_{1,p}(a)=J(\phi_1)=\min_{u\in\mathscr{V}}J(u).$$

记 $J_1(u)=J(u)-\lambda_{1,p}(a)\|u\|_p^p$, 上式说明

$$0=J_1(\phi_1)=\inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)}J_1(u).$$

利用定理 1.2.1 得

$$\langle J_1'(\phi_1),\varphi\rangle=0,\quad\forall\,\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

这说明 $\phi_1\in\mathscr{V}$ 是方程 $\mathscr{L}_pu=\lambda_{1,p}(a)|u|^{p-2}u$ 的解. 显然 $\lambda_{1,p}(a)>0$.

利用命题 9.1.1 知, $\phi_1\in C^{1+\beta}(\bar\Omega)$, 其中 $0<\beta<1$. 因为 $0=J_1(\phi_1)=J_1(|\phi_1|)$, 同上可证 $\mathscr{L}_p|\phi_1|=\lambda_{1,p}(a)|\phi_1|^{p-1}$. 由此推得

$$-\Delta_p|\phi_1|+\|a(x)\|_\infty|\phi_1|^{p-1}\geqslant 0,\quad x\in\Omega.$$

根据命题 9.1.2, 在 Ω 内 $|\phi_1|>0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial|\phi_1|}{\partial\nu}<0$. 又因为 ϕ_1 连续, 所以在 Ω 内 $\phi_1>0$, 或者 $\phi_1<0$. 不妨认为在 Ω 内 $\phi_1>0$, 从而在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\nu}<0$.

现在证明 $\lambda_{1,p}(a)$ 是单重的. 如果 ϕ_1, ϕ_2 都是对应于 $\lambda_{1,p}(a)$ 的特征函数, 由上面的证明知, 在 Ω 内 $\phi_1(x),\phi_2(x)>0$. 直接计算得 $I(\phi_1,\phi_2)=0$. 由引理 9.2.1 知, 存在正常数 c, 使得 $\phi_1=c\phi_2$. 这说明 $\lambda_{1,p}(a)$ 是主特征值.

再证明主特征值的唯一性, 亦即与其他特征值对应的特征函数一定改变符号. 假设 λ 是另一个特征值 (一定有 $\lambda>\lambda_{1,p}(a)$), ψ 是对应的特征函数, 并且 ψ 在 Ω 内不变号. 不妨认为 $\psi\geqslant 0$. 因为 $\psi\not\equiv 0$, 所以

$$\mathscr{L}_p\psi=\lambda|\psi|^{p-2}\psi\geqslant 0,\not\equiv 0,\quad x\in\Omega,$$

从而

$$-\Delta_p\psi+\|a(x)\|_\infty|\psi|^{p-2}\psi\geqslant 0,\not\equiv 0,\quad x\in\Omega.$$

由命题 9.1.2 知, 在 Ω 内 $\psi>0$. 把 ϕ_1 和 ψ 单位化: $\|\phi_1\|_p=\|\psi\|_p=1$. 直接计算得

$$I(\phi_1, \psi) = \big(\lambda_{1,p}(a) - \lambda\big)\big(\|\phi_1\|_p^p - \|\psi\|_p^p\big) = 0.$$

因为 $\phi_1, \psi \in \mathscr{D}(I)$, 并且 $\|\phi_1\|_p = \|\psi\|_p$, 由引理 9.2.1 又知 $\psi = \phi_1$. 所以

$$\lambda\psi^{p-1} = \mathscr{L}_p\psi = \mathscr{L}_p\phi_1 = \lambda_{1,p}(a)\phi_1^{p-1} = \lambda_{1,p}(a)\psi^{p-1}.$$

这与 $\lambda \neq \lambda_{1,p}(a)$ 的事实相矛盾.

$\lambda_{1,p}(a)$ 的孤立性的证明比较复杂, 这里略去. 有兴趣的读者可以参看文献 [38].

推论 9.2.1 利用式 (9.4) 和 Sobolev 不等式知: 当 $a(x) = 0$ 时, $\lambda_{1,p}(0) > 0$.

下面讨论主特征值 $\lambda_{1,p}(a)$ 关于函数 $a(x)$ 和区域 Ω 的单调性. 我们把 $\lambda_{1,p}(a)$ 写成 $\lambda_{1,p}^{\Omega}(a)$.

定理 9.2.2 主特征值 $\lambda_{1,p}^{\Omega}(a)$ 具有如下性质:

(1) $\lambda_{1,p}^{\Omega}(a)$ 关于 Ω 是单减的, 即当 $\Omega_1 \subset \Omega_2$ 时, $\lambda_{1,p}^{\Omega_1}(a) \geqslant \lambda_{1,p}^{\Omega_2}(a)$. 同时当 $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ 时, 还有 $\lambda_{1,p}^{\Omega_1}(a) > \lambda_{1,p}^{\Omega_2}(a)$;

(2) $\lambda_{1,p}^{\Omega}(a)$ 关于 a 是连续和单增的;

(3) 对任意的常数 M, 成立 $\lambda_{1,p}^{\Omega}(a+M) = \lambda_{1,p}^{\Omega}(a) + M$;

(4) 对任意的 $t \in (0,1)$ 和 $a_1, a_2 \in L^\infty(\Omega)$, 有

$$\lambda_{1,p}^{\Omega}(ta_1 + (1-t)a_2) \geqslant t\lambda_{1,p}^{\Omega}(a_1) + (1-t)\lambda_{1,p}^{\Omega}(a_2).$$

该定理的结论 (4) 的证明可以直接利用公式 (9.4), 其他结论的证明同于第 2 章.

以后, 如果所讨论的问题中的区域固定, 就把特征值问题 (9.2.3) 的主特征值记为 $\lambda_{1,p}(a)$. 如果所讨论的问题中的区域变化, 就把特征值问题 (9.2.3) 的第一特征值记为 $\lambda_{1,p}^{\Omega}(a)$.

下面, 我们讨论另一类特征值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_p u = \lambda b(x)|u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{9.2.4}$$

其中 $a(x), b(x) \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \geqslant 0$, $b(x)$ 满足:

$$\mathscr{V}_b = \Big\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega b(x)|u(x)|^p \mathrm{d}x > 0\Big\} \neq \varnothing.$$

定义

$$A(u) = \int_\Omega \big[|\nabla u|^p + a(x)|u|^p\big]\mathrm{d}x,$$

$$B(u) = \int_\Omega b(x)|u|^p \mathrm{d}x, \quad J_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u).$$

定理 9.2.3 特征值问题 (9.2.4) 有正的主特征值 (它对应的特征函数是实函数并且在 Ω 内无零点), 记为 λ_1, 并且 λ_1 是问题 (9.2.4) 的非负特征值中的最小者. 同时 λ_1 还可由下面的方式确定:

$$\frac{1}{\lambda_1}=\sup\left\{R(u)\triangleq B(u)/A(u):\ u\in\mathscr{V}_b\right\}. \tag{9.2.5}$$

此外, 当 $\lambda>\lambda_1$ 时问题 (9.2.4) 没有正解.

证明 **第一步** 证明由式 (9.2.5) 定义的 λ_1 是可达的.

直接由 Poincaré 不等式知, 在 $\mathscr{V}_b$ 上 $R(u)$ 有上界, 故存在上确界, 记为 R_0. 显然 $R_0>0$. 取 $\{u_i\}_{i=1}^\infty\subset\mathscr{V}_b$, 使得 $R(u_i)\longrightarrow R_0$. 不妨认为 $R(u_i)\geqslant R_0/2$ 对所有的 i 都成立, 即

$$\int_\Omega\left[|\nabla u_i|^p+a(x)|u_i|^p\right]\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{R_0}\int_\Omega b(x)|u_i|^p\mathrm{d}x.$$

定义

$$v_i=u_i\left(\int_\Omega b(x)|u_i|^p\mathrm{d}x\right)^{-1/p},$$

那么 v_i 满足

$$\int_\Omega b(x)|v_i|^p\mathrm{d}x=1,\quad\int_\Omega\left[|\nabla v_i|^p+a(x)|v_i|^p\right]\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{R_0}.$$

故 $\{v_i\}_{i=1}^\infty\subset\mathscr{V}_b$ 且有界. 不妨假设存在 $v_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 使得在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $v_i\rightharpoonup v_0$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $v_i\longrightarrow v_0$. 显然有

$$\int_\Omega b(x)|v_0|^p\mathrm{d}x=1.$$

因为 $R(u_i)\longrightarrow R_0$, 所以对充分小的 $\varepsilon>0$, 当 i 适当大时有 $R(u_i)\geqslant R_0-\varepsilon$, 即

$$\int_\Omega\left[|\nabla u_i|^p+a(x)|u_i|^p\right]\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{R_0-\varepsilon}\int_\Omega b(x)|u_i|^p\mathrm{d}x.$$

从而有

$$\int_\Omega\left[|\nabla v_i|^p+a(x)|v_i|^p\right]\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{R_0-\varepsilon}.$$

根据范数的弱下半连续性, 从上式推知

$$\int_\Omega\left[|\nabla v_0|^p+a(x)|v_0|^p\right]\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{R_0-\varepsilon}=\frac{1}{R_0-\varepsilon}\int_\Omega b(x)|v_0|^p\mathrm{d}x.$$

再由 ε 的任意性得

$$\int_\Omega\left[|\nabla v_0|^p+a(x)|v_0|^p\right]\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{R_0}\int_\Omega b(x)|v_0|^p\mathrm{d}x,$$

即 $R(v_0)\geqslant R_0$. 又因为 $v_0\in\mathscr{V}_b$, R_0 是 $R(u)$ 在 $\mathscr{V}_b$ 上的最大值, 所以 $R(v_0)\leqslant R_0$. 故 $R(v_0)=R_0$. 这说明 $1/\lambda_1=R_0$ 是可达的, 并且 $0<\lambda_1<\infty$.

第二步 证明上面确定的 v_0 是 $\lambda=\lambda_1$ 时问题 (9.2.4) 的正解或者负解.

因为

$$1/\lambda_1=R(v_0)=\max\left\{R(u)\triangleq B(u)/A(u):u\in\mathscr{V}_b\right\},$$

所以 $v_0\in\mathscr{V}_b$ 是 $J_{\lambda_1}(u)=A(u)-\lambda_1B(u)$ 在 $\mathscr{V}_b$ 中的最小值点, 并且 $J_{\lambda_1}(v_0)=0$. 又因为 $\int_\Omega b(x)|v_0|^p\mathrm{d}x=1$, 故对于任意的 $\phi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 当 $|t|$ 适当小时有

$$\int_\Omega b(x)|v_0+t\phi|^p\mathrm{d}x>0,$$

即 $v_0+t\phi\in\mathscr{V}_b$. 所以 $j(t):=J_{\lambda_1}(v_0+t\phi)$ 在 $t=0$ 处取到最小值, 故 $j'(0)=0$, 即

$$\int_\Omega\left[|\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\cdot\nabla\phi+a|v_0|^{p-2}v_0\phi\right]\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega b|v_0|^{p-2}v_0\phi\mathrm{d}x,\quad\forall\ \phi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

这说明 v_0 是 $\lambda=\lambda_1$ 时问题 (9.2.4) 的非平凡解. 注意到 $J_{\lambda_1}(u)=J_{\lambda_1}(|u|)$, 故有 $J_{\lambda_1}(|v_0|)=0$, 即 $|v_0|\in\mathscr{V}_b$ 是 $J_{\lambda_1}(u)=A(u)-\lambda_1B(u)$ 在 $\mathscr{V}_b$ 中的最小值点. 同上可得 $|v_0|$ 是 $\lambda=\lambda_1$ 时问题 (9.2.4) 的非平凡非负解. 依次利用命题 9.1.1 和命题 9.1.2 可以推知: $|v_0|\in C^{1+\beta}(\bar\Omega)$, 在 Ω 内 $|v_0|>0$, 并且在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial|v_0|}{\partial\nu}<0$. 由此又知在 Ω 内 $v_0(x)>0$ 或者 $v_0(x)<0$ 恒成立.

第三步 证明当 $0\leqslant\lambda<\lambda_1$ 时, 问题 (9.2.4) 没有非平凡解.

当 $\lambda=0$ 时结论显然成立. 假设 $0<\lambda<\lambda_1$, u 是问题 (9.2.4) 的一个非平凡解, 用 u 乘以问题 (9.2.4) 的方程并在 Ω 上积分得

$$\lambda B(u)=A(u)>0.$$

这说明 $u\in\mathscr{V}_b$, 并且 $R(u)=B(u)/A(u)=1/\lambda>1/\lambda_1$. 此与 λ_1 的定义相矛盾.

第四步 证明 λ_1 是简单的. 假设 u,v 都是 $\lambda=\lambda_1$ 时问题 (9.2.4) 的非平凡解. 由第二步的证明知, u 和 v 都是保号的. 不妨认为 $u,v>0$. 再由第二步的证明, 在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}<0$, $\dfrac{\partial v}{\partial\nu}<0$. 根据引理 2.2.1, $u,v\in\mathscr{D}(I)$. 直接计算得 $I(u,v)=0$. 利用引理 9.2.1 知, 存在常数 c 使得 $u=cv$.

第五步 证明当 $\lambda>\lambda_1$ 时, 问题 (9.2.4) 没有正解 (当然也没有负解).

用反证法. 假设 $\lambda>\lambda_1$, 函数 v 是问题 (9.2.4) 的正解. 记 u 是 $\lambda=\lambda_1$ 时问题 (9.2.4) 的正解. 那么

$$\lambda_1\int_\Omega b(x)u^p\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[|\nabla u|^p+a(x)u^p\right]\mathrm{d}x>0,$$

并且对于任意的常数 $k>0$, 函数 ku 也是问题 (9.2.4) 的正解. 依次利用命题 9.1.1 和命题 9.1.2 可以推得, 在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial(ku)}{\partial\nu}<0$, $\dfrac{\partial v}{\partial\nu}<0$. 根据引理 2.2.1, $ku,v\in\mathscr{D}(I)$. 直接计算得

$$I(ku,v)=(\lambda_1-\lambda)\left(k^p\int_\Omega b(x)u^p\mathrm{d}x-\int_\Omega b(x)v^p\mathrm{d}x\right).$$

因为 $\int_\Omega b(x)u^p\mathrm{d}x>0$, 所以当 k 适当大时, $I(ku,v)<0$. 此与引理 9.2.1 矛盾. 定理得证.

与 2.6 节相同, 当 $b(x)$ 变号时特征值问题 (9.2.4) 也有负的主特征值. 所以当 $b(x)$ 变号时, 问题 (9.2.4) 的主特征值也不唯一.

9.3 主特征值与最大值原理之间的关系

本节讨论算子 $\mathscr{L}_p:=-\Delta_p+a(x)\varphi_p$ 的最大值原理, 其中 $\varphi_p(u)=|u|^{p-2}u$.

定理 9.3.1 设 $a\in L^\infty(\Omega)$. 那么下面的五个结论等价:

(1) 算子 $\mathscr{L}_p$ 满足最大值原理;

(2) 算子 $\mathscr{L}_p$ 满足强最大值原理;

(3) $\lambda_{1,p}(a)>0$;

(4) 存在正的严格上解 $\phi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 使得 $\mathscr{L}_p\phi\in L^\infty(\Omega)$, 即 $\mathscr{L}_p\phi=f\in L^\infty(\Omega)$, $f\geqslant 0,\neq 0$, $\phi|_{\partial\Omega}=0$;

(5) 对每一个非负函数 $f\in L^\infty(\Omega)$, 方程 $\mathscr{L}_p\phi=f$ 存在唯一弱解 $\phi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 并且 ϕ 是非负的.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 假设 $f\in L^\infty(\Omega)$, $f\geqslant 0,\neq 0$, $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 是方程 $-\Delta_pu+a|u|^{p-2}u=f$ 的弱解, 并且 $u|_{\partial\Omega}\geqslant 0$. 由结论 (1) 知 $u\geqslant 0$. 因为

$$-\Delta_pu+a|u|^{p-2}u=f\geqslant 0,\neq 0,\quad x\in\Omega,$$

根据命题 9.1.2, $u>0$ 在 Ω 内成立. 此外, 若存在 $x_0\in\partial\Omega$ 使得 $u(x_0)=0$, 那么 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{x_0}<0$ (只要这个外法向导数存在).

(2)$\Longrightarrow$(3). 假设 $\lambda_{1,p}(a)\leqslant 0$, $\phi_1\in C^{1+\beta}(\bar\Omega)$ 是对应于 $\lambda_{1,p}(a)$ 的正特征函数, 那么 $\psi_1=-\phi_1$ 满足

$$-\Delta_p\psi_1+a|\psi_1|^{p-2}\psi_1=\lambda_{1,p}(a)|\psi_1|^{p-2}\psi_1\geqslant 0.$$

由结论 (2) 知 $\psi_1\geqslant 0$, 即 $\phi_1\leqslant 0$. 该矛盾说明 $\lambda_{1,p}(a)>0$.

(3)$\Longrightarrow$(4) 是明显的.

(4)$\Longrightarrow$(3). 假设 $\phi_1\in C^{1+\beta}(\bar\Omega)$ 是对应于 $\lambda_{1,p}(a)$ 的正特征函数, $\|\phi_1\|_p=1$. 因为 ϕ 是正的严格上解, 所以 $(\phi_1,\phi)\in\mathscr{D}(I)$. 特别地, $\phi/\phi_1\in L^\infty(\Omega)$. 取定正常数 $c\geqslant\|\phi/\phi_1\|_\infty$ 并令 $\phi_2=c\phi_1$, 那么 ϕ_2 也是对应于 $\lambda_{1,p}(a)$ 的正特征函数.

如果 $\lambda_{1,p}(a) \leqslant 0$, 由 $f \geqslant 0$ 知

$$\left\langle -\Delta_p \phi, \frac{\phi_2^p - \phi^p}{\phi^{p-1}} \right\rangle \geqslant -\int_\Omega a(\phi_2^p - \phi^p)\mathrm{d}x,$$

因此

$$I(\phi_2, \phi) \leqslant \int_\Omega \lambda_{1,p}(a)(\phi_2^p - \phi^p)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

利用引理 9.2.1 便可推得 $I(\phi_2, \phi) = 0$, 并且存在常数 $\gamma > 0$ 使得 $\phi_2 = \gamma\phi$, 即 $c\phi_1 = \gamma\phi$. 由此又得

$$-\Delta_p \phi_1 + a|\phi_1|^{p-2}\phi_1 = (\gamma/c)^{p-1} f, \quad x \in \Omega.$$

因为 $f \geqslant 0, \neq 0$, 所以 $\lambda_{1,p}(a) = J(\phi_1) > 0$. 得到一个矛盾.

(3)$\Longrightarrow$(1). 假设 $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, 使得 $\langle f, \phi \rangle \geqslant 0$ 对所有非负函数 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 成立. 再设 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a|u|^{p-2}u = f, & x \in \Omega, \\ u \geqslant 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解. 因为 $u^- = \min\{u, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 在 (9.2) 式中取 $\phi = u^-$ 得

$$\int_\Omega (|\nabla u^-|^p + a|u^-|^p)\mathrm{d}x = \langle f, u^- \rangle \leqslant 0.$$

注意到 $\lambda_{1,p}(a) > 0$, 由上式知 $u^- \equiv 0$. 故 $u \geqslant 0$.

(5)$\Longrightarrow$(4). 给定一个不恒为零的非负函数 $f \in L^\infty(\Omega)$, 由结论 (5) 知方程 $\mathscr{L}_p u = f$ 有唯一非负弱解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. 当然 u 满足 $-\Delta_p u + \|a\|_\infty |u|^{p-2}u \geqslant 0, \neq 0$. 由命题 9.1.2 又知, 在 Ω 内 $u > 0$. 这说明 u 是一个正的严格上解.

(3)$\Longrightarrow$(5). 由于结论 (3) 成立, 故强最大值原理 (2) 成立. 因为 $\lambda_{1,p}(a) > 0$, 故对每个 $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, 泛函

$$J_f(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^p + a|u|^p - pfu)\mathrm{d}x$$

在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上是强制的. 因而对每个 $f \in L^\infty(\Omega)$, 问题 (9.1.1) 存在弱解. 再利用结论 (1) 知, 当 $f \geqslant 0$ 时这个解还是非负的. 此外, 如果 $f \equiv 0$, 由强最大值原理得 $u \equiv 0$. 如果 $f \geqslant 0, \neq 0$, $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 都是 (9.1.1) 的非负解, 根据强最大值原理, 在 Ω 内 $u, v > 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}, \dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$. 由此得 $(u, v) \in \mathscr{D}(I)$, 故有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left\langle -\Delta_p u, \frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right\rangle - \left\langle -\Delta_p v, \frac{u^p - v^p}{v^{p-1}} \right\rangle \\ &= \int_\Omega f \frac{v^{p-1} - u^{p-1}}{u^{p-1} v^{p-1}} (u^p - v^p)\mathrm{d}x \leqslant 0. \end{aligned}$$

于是 $I(u,v)=0$, 并且存在正常数 c 使得 $v=cu$. 因而 $f=c^{p-1}f$. 由于 $f\not\equiv 0$, 所以 $c=1$. 唯一性成立. 证毕.

利用定理 9.3.1 可以推出下面的比较原理.

定理 9.3.2 假设 $a\in L^\infty(\Omega)$, $\lambda_{1,p}(a)>0$, $u_i\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 满足

$$\mathscr{L}_pu_i\in L^\infty(\Omega),\quad u_i|_{\partial\Omega}\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega),\quad i=1,2,\quad u_1|_{\partial\Omega}\leqslant u_2|_{\partial\Omega},$$

同时在弱的意义下满足

$$\mathscr{L}_pu_1\leqslant\mathscr{L}_pu_2,\quad x\in\Omega.$$

又设 $\mathscr{L}_pu_2\geqslant 0$, $u_2|_{\partial\Omega}\geqslant 0$. 那么在 Ω 内 $u_1\leqslant u_2$.

证明 因为 $\lambda_{1,p}(a)>0$, 所以最大值原理和强最大值原理都成立. 由最大值原理知, $u_2\geqslant 0$. 如果 $u_2\equiv 0$, 则 u_1 满足

$$\mathscr{L}_pu_1\leqslant 0,\quad x\in\Omega;\quad u_1\leqslant 0,\quad x\in\partial\Omega.$$

再次利用最大值原理又知, $u_1\leqslant 0$. 结论成立.

现在假设 $u_2\not\equiv 0$. 根据强最大值原理, 在 Ω 内 $u_2>0$. 再利用命题 9.1.1, 得 $u_1,u_2\in C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$. 记 $f=\mathscr{L}_pu_2$, 则 $f\geqslant 0$, 并且 u_1 和 u_2 满足

$$-\Delta_pu_1+a(x)|u_1|^{p-2}u_1\leqslant f=-\Delta_pu_2+a(x)u_2^{p-1},\quad x\in\Omega.$$

对于任意的 $\phi_i\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi_i\geqslant 0$, $i=1,2$, 我们有

$$\left\{\begin{aligned}&\int_\Omega|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\cdot\nabla\phi_1\mathrm{d}x+\int_\Omega a(x)|u_1|^{p-2}u_1\phi_1\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega f\phi_1\mathrm{d}x,\\&\int_\Omega|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\cdot\nabla\phi_2\mathrm{d}x+\int_\Omega a(x)u_2^{p-1}\phi_2\mathrm{d}x=\int_\Omega f\phi_2\mathrm{d}x.\end{aligned}\right.\tag{9.3.1}$$

下面用反证法证明我们的结论. 如果 $u_1(x)\leqslant u_2(x)$ 不成立, 由于在 $\partial\Omega$ 上 $u_1\leqslant u_2$, 所以存在 $x_0\in\Omega$, 使得 $u_1(x_0)>u_2(x_0)$. 对于任给的 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}[u_1(x_0)-u_2(x_0)]$, 记 $\varepsilon=\varepsilon_1$, $2\varepsilon=\varepsilon_2$,

$$\Omega(\varepsilon)=\{x\in\Omega:\ u_1(x)+\varepsilon_1>u_2(x)+\varepsilon_2\},$$

$$w_i=u_i+\varepsilon_i,\quad v_i=\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_i^{p-1}},\quad i=1,2.$$

注意到在 $\partial\Omega$ 上 $u_1\leqslant u_2$, 所以 $\Omega(\varepsilon)\subset\subset\Omega$, $v_i\in W_0^{1,p}(\Omega(\varepsilon))$, 并且在 $\Omega(\varepsilon)$ 的外部 $v\equiv 0$. 因此可以用 v_i 代替 (9.3.1) 中的 ϕ_i. 再注意到 $\nabla u_i=\nabla w_i$ 并且在 $\Omega(\varepsilon)$ 内 $u_1>0$, 利用式 (9.3.1) 便可推得

$$\int_{\Omega(\varepsilon)}|\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1\cdot\nabla\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_1^{p-1}}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\Omega(\varepsilon)} a(x)u_1^{p-1}\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_1^{p-1}}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega(\varepsilon)} f\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_1^{p-1}}\mathrm{d}x, \tag{9.3.2}$$

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} |\nabla w_2|^{p-2}\nabla w_2\cdot\nabla\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\Omega(\varepsilon)} a(x)u_2^{p-1}\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\mathrm{d}x = \int_{\Omega(\varepsilon)} f\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\mathrm{d}x. \tag{9.3.3}$$

由此推出

$$\int_{\Omega(\varepsilon)}\left(|\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1\cdot\nabla\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} - |\nabla w_2|^{p-2}\nabla w_2\cdot\nabla\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\right)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\Omega(\varepsilon)} a(x)\left(u_1^{p-1}\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} - u_2^{p-1}\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\right)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_{\Omega(\varepsilon)} f[w_1^p-w_2^p]^+\left(\frac{1}{w_1^{p-1}}-\frac{1}{w_2^{p-1}}\right)\mathrm{d}x. \tag{9.3.4}$$

记上式中的三项分别为 I_1, I_2 和 I_3. 由于在 $\Omega(\varepsilon)$ 上 $w_1 > w_2$, $f \geqslant 0$, 所以 $I_3 \leqslant 0$. 同于引理 9.2.1 的证明可推知 $I_1 \geqslant 0$. 从而

$$I_2 = \int_{\Omega(\varepsilon)} a(x)\left(u_1^{p-1}\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} - u_2^{p-1}\frac{[w_1^p-w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\right)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

因为被积函数有界, 由控制收敛定理知 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_2 = 0$. 在不等式 (9.3.4) 中令 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 得

$$\int_{\Omega(0)}\left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\cdot\nabla\frac{[u_1^p-u_2^p]^+}{u_1^{p-1}} - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\cdot\nabla\frac{[u_1^p-u_2^p]^+}{u_2^{p-1}}\right)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_{\Omega(0)} f[u_1^p-u_2^p]^+\left(\frac{1}{u_1^{p-1}}-\frac{1}{u_2^{p-1}}\right)\mathrm{d}x. \tag{9.3.5}$$

同于引理 9.2.1 的证明, 上式左端非负. 又因为在 $\Omega(0)$ 上 $u_1 > u_2$, $f \geqslant 0$, 所以式 (9.3.5) 右端非正. 于是在 $\Omega(0)$ 上 $f \equiv 0$,

$$\int_{\Omega(0)}\left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\cdot\nabla\frac{[u_1^p-u_2^p]^+}{u_1^{p-1}} - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\cdot\nabla\frac{[u_1^p-u_2^p]^+}{u_2^{p-1}}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

同于引理 9.2.1 的证明, 存在正常数 c, 使得在 $\bar{\Omega}(0)$ 上 $u_1 = cu_2$. 因为 $x_0 \in \Omega(0)$, $u_1(x_0) > u_2(x_0)$, 所以 $c > 1$.

如果 $\Omega(0) \neq \Omega$, 则存在 $\hat{x} \in \partial\Omega(0)\cap\Omega$, 从而 $u_1(\hat{x}) = u_2(\hat{x})$, 故 $c = 1$. 该矛盾说明 $\Omega(0) = \Omega$, 即在 Ω 上 $u_1 = cu_2$, $c > 1$. 又因为在 $\partial\Omega(0)$ 上 $u_1 = u_2$, 所以在 $\partial\Omega(0) = \partial\Omega$ 上 $u_1 = u_2 = 0$. 直接计算知

$$\mathscr{L}_p u_1 = c^{p-1}\mathscr{L}_p u_2 = c^{p-1} f = 0.$$

根据解的唯一性 (见定理 9.3.1 的结论 (5)), 在 Ω 上 $u_1 = u_2 = 0$. 这是一个矛盾. 证毕.

定理 9.3.3 假设 $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 Carathéodory 函数 (对几乎所有的 $x \in \Omega$, $g(x, \cdot)$ 连续, 对所有的 $u \in \mathbb{R}$, $g(\cdot, u)$ 可测), 并且对几乎所有的 $x \in \Omega$, $g(x, u)$ 关于 $u \in \mathbb{R}$ 单调不减. 如果 $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(x, u) \leqslant -\Delta_p v + g(x, v), & x \in \Omega, \\ u \leqslant v, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

则 $u \leqslant v$.

证明 取检验函数 $\phi = (u - v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 则有

$$\begin{aligned} 0 \geqslant & \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \cdot \nabla (u - v)^+ \mathrm{d}x \\ & + \int_\Omega \left[g(x, u) - g(x, v)\right](u - v)^+ \mathrm{d}x \\ = & \int_{\{u \geqslant v\}} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \cdot \nabla (u - v) \mathrm{d}x \\ & + \int_{\{u \geqslant v\}} \left[g(x, u) - g(x, v)\right](u - v) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{9.3.6}$$

由于

$$\begin{aligned} & \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \cdot \nabla (u - v) \\ = & |\nabla u|^p - |\nabla v|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + |\nabla v|^p \\ \geqslant & |\nabla u|^p + |\nabla v|^p - \left(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2}\right)|\nabla u| \cdot |\nabla v| \\ = & \left(|\nabla u| - |\nabla v|\right)\left(|\nabla u|^{p-1} - |\nabla v|^{p-1}\right) \\ \geqslant & 0, \end{aligned}$$

并且 $g(x, u)$ 关于 $u \in \mathbb{R}$ 单调不减, 所以式 (9.3.6) 右端两项中的被积函数都是非负的. 再利用边界条件知 $(u - v)^+ = 0$ 几乎处处成立, 即 $u \leqslant v$ 在 Ω 内成立. 定理得证.

在定理 9.3.3 中, 如果不假设 $g(x, u)$ 关于 $u \in \mathbb{R}$ 是单调不减的, 那么结论不真. 文献 [38] 中有反例.

定理 9.3.4 假设 $a \in L^\infty(\Omega)$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 是一个 Carathéodory 函数. 又设 $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$ 是非负函数, 在弱的意义下满足

$$-\Delta_p u_1 + a(x){u_1}^{p-1} + f(x, u_1) \geqslant 0 \geqslant -\Delta_p u_2 + a(x){u_2}^{p-1} + f(x, u_2), \quad x \in \Omega,$$

同时还满足

$$\limsup_{d(x,\partial\Omega)\to 0} ({u_1}^p - {u_2}^p)(x) \geqslant 0.$$

如果对于几乎所有的 $x \in \Omega$, 函数 $\dfrac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ 关于

$$s \in \big(\inf\{u_1, u_2\}, \sup\{u_1, u_2\}\big)$$

是单调不减的, 那么在 Ω 内 $u_1 \geqslant u_2$.

证明　该证明与定理 9.3.2 类似, 这里只给出证明梗概. 仍用反证法, 并且采用定理 9.3.2 的证明中的记号. 对应的不等式 (9.3.1) 换成

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla\phi_1 \mathrm{d}x + \int_\Omega a(x)u_1^{p-1}\phi_1 \mathrm{d}x \leqslant -\int_\Omega f(x,u_1)\phi_1 \mathrm{d}x, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\phi_2 \mathrm{d}x + \int_\Omega a(x)u_2^{p-1}\phi_2 \mathrm{d}x \geqslant -\int_\Omega f(x,u_2)\phi_2 \mathrm{d}x. \end{cases}$$

对应的不等式 (9.3.2) 和 (9.3.3) 分别成为

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(\varepsilon)} |\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1 \cdot \nabla \frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Omega(\varepsilon)} a(x)u_1^{p-1}\frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} \mathrm{d}x \\ \leqslant &-\int_{\Omega(\varepsilon)} f(x,u_1)\frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(\varepsilon)} |\nabla w_2|^{p-2}\nabla w_2 \cdot \nabla \frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_2^{p-1}} \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Omega(\varepsilon)} a(x)u_2^{p-1}\frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_2^{p-1}} \mathrm{d}x \\ \geqslant &-\int_{\Omega(\varepsilon)} f(x,u_2)\frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_2^{p-1}} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

对应的不等式 (9.3.4) 成为

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(\varepsilon)} \left(|\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1 \nabla \frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} - |\nabla w_2|^{p-2}\nabla w_2 \cdot \nabla \frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Omega(\varepsilon)} a(x)\left(u_1^{p-1}\frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_1^{p-1}} - u_2^{p-1}\frac{[w_1^p - w_2^p]^+}{w_2^{p-1}}\right) \mathrm{d}x \\ \leqslant &-\int_{\Omega(\varepsilon)} [w_1^p - w_2^p]^+ \left(\frac{f(x,u_1)}{w_1^{p-1}} - \frac{f(x,u_2)}{w_2^{p-1}}\right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由于函数$\dfrac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ 关于 $s \in \big(\inf\{u_1,u_2\}, \sup\{u_1,u_2\}\big)$ 是单调不减的, 在 $\Omega(\varepsilon)$ 上 $u_1 >$

u_2, 并且 $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$, 容易证明

$$\frac{f(x,u_1)}{w_1^{p-1}} - \frac{f(x,u_2)}{w_2^{p-1}} \geqslant 0, \quad \forall\, x \in \Omega(\varepsilon). \tag{9.3.7}$$

这样, 对应的不等式 (9.3.5) 成为

$$\int_{\Omega(0)} \left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla \frac{[u_1^p - u_2^p]^+}{u_1^{p-1}} - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla \frac{[u_1^p - u_2^p]^+}{u_2^{p-1}} \right) \mathrm{d}x$$
$$\leqslant -\int_{\Omega(0)} [u_1^p - u_2^p]^+ \left(\frac{f(x,u_1)}{u_1^{p-1}} - \frac{f(x,u_2)}{u_2^{p-1}} \right) \mathrm{d}x.$$

其余的证明完全同于定理 9.3.2. 证毕.

9.4 一个边值问题解的渐近性质

在定理 1.3.1 中, 我们已经证明了当 $1 \leqslant q < p^*$, $q \neq p$ 时, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.4.1}$$

至少存在一个非平凡的非负解, 其中当 $p < n$ 时 $p^*np/(n-p)$, 当 $p \geqslant n$ 时 $p^* = \infty$. 根据注 1.3.1, 问题 (9.4.1) 的非平凡非负解一定是正解. 再根据定理 9.3.4, 当 $1 \leqslant q < p$ 时问题 (9.4.1) 的正解是唯一的. 由此不难推出, 当 $1 \leqslant q < p$ 时, 对于任给的 $\lambda > 0$, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1}, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.4.2}$$

有唯一正解, 记为 $u_{\lambda,q}$.

本节讨论当 $q \longrightarrow p^-$ 时问题 (9.4.2) 的唯一正解的渐近性质, 其内容参考了文献 [41].

为了书写简便, 我们记特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{p-1}, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值 $\lambda_{1,p} = \lambda_p$, 对应的正特征函数为 $\phi_p(x)$. 把 $\phi_p(x)$ 单位化 $\|\nabla\phi_p\|_p = 1$, 则有

$$\|\phi_p\|_p^p = \sup_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_p = 1}} \|u\|_p^p = \sup_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_p \leqslant 1}} \|u\|_p^p = \frac{1}{\lambda_p}. \tag{9.4.3}$$

定理 9.4.1　映射 $(\lambda,q)\in(0,\infty)\times[1,p)\longmapsto u_{\lambda,q}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的强拓扑意义下是连续的. 同时, 存在一个只依赖 p,n 和 Ω 的正常数

$$c_p\in\left[\left(\lambda_p\|\phi_p\|_\infty\right)^{-1},\ |\Omega|\right],$$

使得对任何 $\lambda>0$, 都有

$$\lim_{q\to p^-}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda}\right)^{\frac{q}{p-q}}\int_\Omega u_{\lambda,q}^q(x)\mathrm{d}x=c_p.$$

证明　先证第一部分结论. 设 $\lambda>0$, $q\in[1,p)$, 定义

$$\Psi_{\lambda,q}(u)=\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{\lambda}{q}\|u\|_q^q.$$

因为 $u_{\lambda,q}$ 是问题 (9.4.2) 的解, 所以对任意的 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega|\nabla u_{\lambda,q}|^{p-2}\nabla u_{\lambda,q}\cdot\nabla u\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega u_{\lambda,q}^{q-1}u\mathrm{d}x.$$

特别地,

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p^p=\lambda\|u_{\lambda,q}\|_q^q. \tag{9.4.4}$$

利用 Poincaré不等式知, 存在正常数 $K(p,q)$ 使得

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p\leqslant\left[\lambda K(p,q)\right]^{1/(p-q)}. \tag{9.4.5}$$

记 $\{(\lambda_k,q_k)\}_{k=1}^\infty\subset(0,\infty)\times[1,p)$ 是趋于 (λ,q) 的一个序列. 应用不等式 (9.4.5), 并注意到 $q<p$, 我们有

$$\|\nabla u_{\lambda_k,q_k}\|_p\leqslant\left[\lambda_kK(p,q_k)\right]^{1/(p-q_k)}\leqslant C(\lambda,p,q),$$

这说明序列 $\{u_{\lambda_k,q_k}\}_{k=1}^\infty$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界. 通过选取子列, 存在函数 $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 使得在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_{\lambda_k,q_k}\rightharpoonup v$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_{\lambda_k,q_k}\longrightarrow v$ (推论 A.5.1). 根据注 1.3.1 还可以看出, $\|u_{\lambda_k,q_k}\|_\infty$ 关于 k 有界, 进而有

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega\left(u_{\lambda_k,q_k}^{q_k}(x)-u_{\lambda_k,q_k}^q(x)\right)\mathrm{d}x=0. \tag{9.4.6}$$

因为在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_{\lambda_k,q_k}\longrightarrow v$, 当然在 $L^q(\Omega)$ 中也有 $u_{\lambda_k,q_k}\longrightarrow v$. 通过选取子列并利用式 (9.4.6), 可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_{\lambda_k,q_k}^{q_k}(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega|v(x)|^q\mathrm{d}x. \tag{9.4.7}$$

利用范数的弱下半连续性又得

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda,q}(v) &\leqslant \liminf_{k\to\infty} \Psi_{\lambda_k,q_k}(u_{\lambda_k,q_k}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \Psi_{\lambda_k,q_k}(u_{\lambda,q}) \\ &= \frac{1}{p}\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p^p - \lim_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k}{q_k}\|u_{\lambda,q}\|_q^q = \Psi_{\lambda,q}(u_{\lambda,q}).\end{aligned}$$

因为 $u_{\lambda,q}$ 是 $\Psi_{\lambda,q}(v)$ 的整体极小点, 所以 $v = u_{\lambda,q}$. 对每一个 u_{λ_k,q_k} 应用式 (9.4.4), 再结合式 (9.4.7) 容易得到

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla u_{\lambda_k,q_k}\|_p = \|\nabla u_{\lambda,q}\|_p.$$

因为空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是自反的, 并且 u_{λ_k,q_k} 弱收敛到 $u_{\lambda,q}$, 所以在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 u_{λ_k,q_k} 强收敛到 $u_{\lambda,q}$. 这就证明了映射 $(\lambda,q) \longmapsto u_{\lambda,q}$ 在 $(0,\infty)\times[1,p)$ 上是连续的.

再证明第二部分结论. 由等式 (9.4.4) 得

$$\Psi_{\lambda,q}(u_{\lambda,q}) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p^p. \tag{9.4.8}$$

我们断言

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p = \sup_{v\in A_{\lambda,q}} \|\nabla v\|_p, \tag{9.4.9}$$

其中

$$A_{\lambda,q} = \left\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|\nabla v\|_p^p = \lambda\|v\|_q^q,\ v \neq 0\right\}.$$

事实上, 由式 (9.4.4) 知 $u_{\lambda,q} \in A_{\lambda,q}$, 所以

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p \leqslant \sup_{v\in A_{\lambda,q}} \|\nabla v\|_p.$$

另一方面, 如果对于某个 $v_0 \in A_{\lambda,q}$, 有 $\|\nabla v_0\|_p > \|\nabla u_{\lambda,q}\|_p$, 注意到 $q < p$, 我们有

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda,q}(v_0) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|\nabla v_0\|_p^p \\ &< \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p^p = \Psi_{\lambda,q}(u_{\lambda,q}) \\ &= \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} \Psi_{\lambda,q}(u).\end{aligned}$$

这是一个矛盾. 所以等式 (9.4.9) 成立.

记

$$C_p(q) = \sup_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|\nabla u\|_p=1}} \|u\|_q$$

是空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 到空间 $L^q(\Omega)$ 的最佳嵌入常数, $1 \leqslant q < p$. 显然当 $v \in A_{\lambda,q}$ 时,

$$\|\nabla v\|_p=\|\nabla v\|_p^{-\frac{q}{p-q}}\|\nabla v\|_p^{1+\frac{q}{p-q}}=\|\nabla v\|_p^{-\frac{q}{p-q}}\|\nabla v\|_p^{\frac{p}{p-q}}$$
$$=\left(\lambda^{\frac{1}{q}}\frac{\|v\|_q}{\|\nabla v\|_p}\right)^{\frac{q}{p-q}}\leqslant\left[\lambda C_p^q(q)\right]^{\frac{1}{p-q}},$$

利用等式 (9.4.9), 进而得到

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p\leqslant\left[\lambda C_p^q(q)\right]^{\frac{1}{p-q}}. \tag{9.4.10}$$

容易看出, 对于任意 $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\left(\lambda\frac{\|v\|_q^q}{\|\nabla v\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-q}},\ v\in A_{\lambda,q}.$$

从而

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p\geqslant\left(\lambda\frac{\|v\|_q^q}{\|\nabla v\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-q}}\|\nabla v\|_p=\left(\lambda^{\frac{1}{q}}\frac{\|v\|_q}{\|\nabla v\|_p}\right)^{\frac{q}{p-q}},$$

进一步又得到

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p\geqslant\sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)}\left(\lambda^{\frac{1}{q}}\frac{\|v\|_q}{\|\nabla v\|_p}\right)^{\frac{q}{p-q}}=\left[\lambda C_p^q(q)\right]^{\frac{1}{p-q}}. \tag{9.4.11}$$

综合式 (9.4.10) 和式 (9.4.11) 推知

$$\|\nabla u_{\lambda,q}\|_p=\left[\lambda C_p^q(q)\right]^{\frac{1}{p-q}}.$$

再由等式 (9.4.4),

$$\|u_{\lambda,q}\|_q^q=\left[\lambda C_p^p(q)\right]^{\frac{q}{p-q}}, \tag{9.4.12}$$

从而有

$$\left(\frac{\lambda_p}{\lambda}\right)^{\frac{q}{p-q}}\int_\Omega|u_{\lambda,q}(x)|^q\mathrm{d}x=\left[\lambda_pC_p^p(q)\right]^{\frac{q}{p-q}}.$$

为证结论, 只需证明极限

$$\lim_{q\to p^-}\left[\lambda_pC_p^p(q)\right]^{\frac{q}{p-q}} \tag{9.4.13}$$

存在, 且属于区间 $\left[\left(\lambda_p\|\phi_p\|_\infty\right)^{-1},\ |\Omega|\right]$.

对于 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 函数

$$f(q):=\varPsi_{\frac{q}{p}\lambda_p,q}(u)=\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{\lambda_p}{p}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x$$

在 $(1,p]$ 上是凹的. 经简单计算知

$$\inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)}\varPsi_{\frac{q}{p}\lambda_p,q}(u)=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p-q}}\inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)}\varPsi_{\lambda_p,q}(u)=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p-q}}\varPsi_{\lambda_p,q}(u_{\lambda_p,q}). \tag{9.4.14}$$

因此函数 $g(q)$ 在 $(1,p]$ 上是凹的, 其中

$$g(q)=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p-q}}\Psi_{\lambda_p,q}(u_{\lambda_p,q}), & 若\ q\in(1,p),\\ 0, & 若\ q=p.\end{cases}$$

由于 $g(p)=0$, 结合式 (9.4.4), (9.4.8) 和 (9.4.12) 知, 对于所有的 $q\in(1,p)$, 有

$$\left[\lambda_p C_p^p(q)\right]^{\frac{q}{p-q}}=\frac{1}{\lambda_p}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}\frac{pq}{q-p}g(q)=\frac{pq}{\lambda_p}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}\frac{g(q)-g(p)}{q-p}. \tag{9.4.15}$$

利用函数 $g(q)$ 的凹性可以推出极限 (9.4.13) 存在.

根据 $C_p(q)$ 的定义和式 (9.4.3), 对任意的 $q\in(1,p)$, 有

$$\begin{aligned}\left[\lambda_p C_p^p(q)\right]^{\frac{q}{p-q}}&\geqslant\left[\lambda_p\left(\int_\Omega\phi_p^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p-q}}\\&=\left[\lambda_p\left(\int_\Omega\left|\frac{\phi_p(x)}{\|\phi_p\|_\infty}\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p-q}}\left(\|\phi_p\|_\infty\right)^{\frac{pq}{p-q}}\\&\geqslant\left[\lambda_p\left(\int_\Omega\left|\frac{\phi_p(x)}{\|\phi_p\|_\infty}\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p-q}}\left(\|\phi_p\|_\infty\right)^{\frac{pq}{p-q}}\\&=\left[\lambda_p\left(\int_\Omega\phi_p^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p-q}}\left(\|\phi_p\|_\infty\right)^{-p}\\&=\left(\lambda_p\lambda_p^{-\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\|\phi_p\|_\infty\right)^{-p}\\&=\frac{1}{\lambda_p\left(\|\phi_p\|_\infty\right)^p}>0.\end{aligned}$$

另一方面, 根据 $C_p(q)$ 的定义并利用 Hölder 不等式推得, 对于任意的 $q\in(1,p)$, 有

$$\left[\lambda_p C_p^p(q)\right]^{\frac{q}{p-q}}\leqslant\left[\lambda_p|\Omega|^{p\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}C_p^p(p)\right]^{\frac{q}{p-q}}=|\Omega|<\infty.$$

所以极限 (9.4.13) 的值属于区间 $\left[\left(\lambda_p\|\phi_p\|_\infty\right)^{-1},\ |\Omega|\right]$. 证毕.

9.5 上下解方法

本节以及 9.6.1 节和 9.7 节的内容参考了文献 [42].

在介绍上下解方法之前, 我们首先利用变分方法, 研究一个特殊问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.5.1}$$

解的存在性, 其中 $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. 定义 g 的原函数

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\mathrm{d}s.$$

假设

(a) 函数 $G: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ 关于 x 可测, 关于 $u \in L^p(\Omega)$ 下半连续, 并且存在 $q > 0$ 和 $C_1 \geqslant 0$, 使得 $G(x,u) \geqslant C_1|u|^{q+1}$ 对所有的 $u \in \mathbb{R}$ 和几乎所有的 $x \in \Omega$ 成立;

(b) 函数集 $K = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : G(x,u) \in L^1(\Omega)\}$ 是非空开集.

定义泛函

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x - \int_\Omega fu\mathrm{d}x. \tag{9.5.2}$$

由条件 (a) 知, $J(u)$ 在 K 上有下界, 记它的下确界为 M. 假设 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 是一个极小化序列. 由于 $C_1 \geqslant 0$, 利用条件 (a), Sobolev 不等式以及

$$\int_\Omega fu\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|u\|_p$$

知, 存在与 i 无关的正常数 C, 使得

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^p \mathrm{d}x \leqslant C, \quad \int_\Omega G(x,u_i(x))\mathrm{d}x \leqslant C, \quad \int_\Omega |u_i|^{q+1}\mathrm{d}x \leqslant C.$$

由于$W_0^{1,p}(\Omega)$ 和 $L^{q+1}(\Omega)$ 都是自反空间, 所以存在 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 的子列仍记为它自身, 以及函数 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$, 使得在 $L^p(\Omega)$ 中 $\nabla u_i \rightharpoonup \nabla u$, $u_i \longrightarrow u$, 在 $L^{q+1}(\Omega)$ 中 $u_i \rightharpoonup u$.

由于 $\int_\Omega G(x,u_i)\mathrm{d}x \leqslant C$, 利用 $G(x,u)$ 关于 u 的下半连续性以及 Fatou 引理知,

$$\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{i\to\infty}\int_\Omega G(x,u_i)\mathrm{d}x.$$

再利用泛函

$$I[u] = \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$$

的弱下半连续性又得 $J(u) \leqslant M$, 因而 $J(u) = M$.

由定理 1.2.1 知, 对任给的 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$0 = J'(u)\phi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega g(x,u)\phi \mathrm{d}x - \int_\Omega f\phi \mathrm{d}x.$$

这说明 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 是问题 (9.5.1) 的解 (这里谈到的解都是弱解).

如果 $g(x,u)$ 关于 $u \in \mathbb{R}$ 单调不减, 那么由定理 9.3.3 知, 问题 (9.5.1) 最多有一个解. 这样, 我们就有下面的定理

定理 9.5.1 在上面的条件之下, 问题 (9.5.1) 至少有一个解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. 如果又假设 $g(x,u)$ 关于 $u \in \mathbb{R}$ 单调不减, 那么问题 (9.5.1) 有唯一解.

下面讨论 p–Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{9.5.3}$$

假设

(H1) h 是 Carathéodory 函数, 并且当 u 属于有界集时, $h(\cdot,u)$ 有界;

(H2) 存在连续的增函数 $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 满足 $g(0) = 0$, 对几乎所有的 $x \in \Omega$, 映射 $u \longmapsto g(u) + h(x,u)$ 是单调不减的, 并且 $G(u)$ 满足上面的条件 (b). 这里的 $G(u) = \int_0^u g(s)\mathrm{d}s$.

定义 9.5.1 函数 $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 被称为问题 (9.5.3) 的一个下解, 如果

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega h(x,\underline{u})\phi \mathrm{d}x, & \forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \phi \geqslant 0, \\ \underline{u} \leqslant 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

函数 $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 被称为问题 (9.5.3) 的一个上解, 如果

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{p-2}\nabla \bar{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega h(x,\bar{u})\phi \mathrm{d}x, & \forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \phi \geqslant 0, \\ \bar{u} \geqslant 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

定理 9.5.2 假设条件 (H1) 和 (H2) 成立, $\bar{u}$, $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 分别是问题 (9.5.3) 的上下解, 并且 $\underline{u} \leqslant \bar{u}$ 在 Ω 内几乎处处成立. 那么问题 (9.5.3) 在区间

$$\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle := \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : \underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x) \ \ \text{a.e. } x \in \Omega \right\}$$

内存在最大解 u^* 和最小解 u_*, 即问题 (9.5.3) 的每一个属于 $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ 的解 u 都满足: $u_*(x) \leqslant u(x) \leqslant u^*(x)$ 在 Ω 内几乎处处成立.

证明 定义算子 $S : \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \longrightarrow L^{p'}(\Omega)$:

$$Sv = h(\cdot, v(\cdot)) + g(v(\cdot)) \in L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega), \quad \forall\ v \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle.$$

由条件 (H1) 和 (H2) 知, S 单调不减且有界. 此外, 对于 $v_m, v \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, 我们有

$$\|Sv_m - Sv\|_{p'}^{p'} = \int_\Omega |h(x, v_m) + g(v_m) - h(x, v) - g(v)|^{p'} \mathrm{d}x.$$

如果在 Ω 内 $v_m \longrightarrow v$ 几乎处处成立, 利用控制收敛定理得 $\|Sv_m - Sv\|_{p'}^{p'} \longrightarrow 0$. 所以 S 是连续的.

根据定理 9.5.1, 对于 $f \in L^{p'}(\Omega)$, 问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

存在唯一解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 记为 $u = Tf$. 利用定理 9.3.3, 算子 $T: L^{p'}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ 是单调不减的. 由定理 9.5.1 的证明又知

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega G(u) \mathrm{d}x - \int_\Omega fu \mathrm{d}x \leqslant J(0) = 0,$$

其中 $G(u) = \int_0^u g(s) \mathrm{d}s$. 注意到 $G(u) \geqslant 0$, 由上式又得

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{p'}.$$

利用该估计式容易推出算子 $T: L^{p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ 是连续的.

定义算子 $F = T \circ S : \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$, 那么 F 是连续和单调不减的. 按照定义, 对于 $v \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, $F(v)$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u) = h(x, v(x)) + g(v(x)), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的唯一解, 并且 u 是问题 (9.5.3) 的解当且仅当 $u = F(u)$. 记 $u_1 = F(\underline{u})$, $u^1 = F(\bar{u})$. 那么对所有的 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega g(u_1)\phi \mathrm{d}x &= \int_\Omega h(x, \underline{u})\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega g(\underline{u})\phi \mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega g(\underline{u})\phi \mathrm{d}x, \\ \int_\Omega |\nabla u^1|^{p-2} \nabla u^1 \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega g(u^1)\phi \mathrm{d}x &= \int_\Omega h(x, \bar{u})\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega g(\bar{u})\phi \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega g(\bar{u})\phi \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注意到 $\underline{u}|_{\partial\Omega} \leqslant 0 = u_1|_{\partial\Omega}$, $u^1|_{\partial\Omega} = 0 \leqslant \bar{u}|_{\partial\Omega}$, 利用定理 9.3.3 得 $\underline{u} \leqslant u_1$, 并且 $u^1 \leqslant \bar{u}$.

对任给的 $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, 由 F 的单调性知 $u_1 = F(\underline{u}) \leqslant F(u) \leqslant F(\bar{u}) = u^1$, 故有

$$\underline{u} \leqslant u_1 \leqslant F(u) \leqslant u^1 \leqslant \bar{u}.$$

定义

$$u^0 = \bar{u}, \quad u^{m+1} = F(u^m), \quad u_0 = \underline{u}, \quad u_{m+1} = F(u_m),$$

那么对于问题 (9.5.3) 的每一个解 $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, 都有

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_m \leqslant u \leqslant u^m \leqslant u^1 \leqslant u^0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

故存在 $u_*, u^* \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, $u_* \leqslant u^*$ 几乎处处于 Ω, 使得 $u_m \longrightarrow u_*$, $u^m \longrightarrow u^*$ 在 Ω 内几乎处处成立. 因为 $F : \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ 是连续的, 所以在空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中

$$u_{m+1} = F(u_m) \longrightarrow F(u_*), \quad u^{m+1} = F(u^m) \longrightarrow F(u^*),$$

从而 $u_*, u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 并且 $u_* = F(u_*)$, $u^* = F(u^*)$. 再由 $u_m \leqslant u \leqslant u^m$ 得 $u_* \leqslant u \leqslant u^*$. 证毕.

9.6 应　　用

作为上节中建立的上下解方法的应用, 本节讨论两类边值问题非平凡非负解的存在性. 第一类是一个方程式的边值问题, 第二类是一个非线性特征值问题.

9.6.1 一个方程式的边值问题

本小节讨论边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{q-1} h(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.6.1}$$

解的存在性, 其中 $p, q > 1$. 当 $p < n$ 时记 $p^* = \dfrac{np}{n-p}$, 当 $p \geqslant n$ 时记 $p^* = \infty$.

定理 9.6.1 假设 h 满足条件 (H1) 和 (H2), 并且存在 $\alpha > 0$ 使得 $h(x, \alpha) \leqslant 0$ 几乎处处于 Ω 内成立. 那么问题 (9.6.1) 存在一个非平凡的非负解 (对于 $p > q$ 的情形), 或者存在正解 (对于 $p \leqslant q < p^*$ 的情形) 的充分条件是

(1) $p > q$ 的情形: 存在 $x_0 \in \Omega$, $r, \varepsilon, \delta > 0$, 使得 $h(x,u) \geqslant \varepsilon$ 对几乎所有的 $x \in B(x_0, r) \subset \Omega$ 和所有 $u \in (0, \delta]$ 成立.

如果还有 $h(x,u) \geqslant 0$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 和所有的 $u \in [0, \alpha]$ 成立, 那么这个解在 Ω 内是正的.

此外, 如果 h 关于 x 和 u 是连续的, 并且关于 u 是单调不增的, 那么这个条件也是必要的;

(2) $p = q$ 的情形:

$$\lambda_{1,p}\big(-h(\cdot, 0)\big) < 0.$$

如果 $h(x,u)$ 关于 u 是单调不增的, 并且 $h(x,u) \neq h(x,0)$ 对于所有的正函数 u 都成立, 那么这个条件也是必要的;

(3) $p < q < p^*$ 的情形: 函数 h 关于 u 是单调不增的, 并且存在 $\gamma > 0$ 使得 $\gamma^{p-q} \leqslant h(x, \gamma\beta)$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 成立, 其中 $\beta = \|\theta\|_\infty$, θ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p\theta = \theta^{q-1}, & x \in \Omega, \\ \theta = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.6.2}$$

的一个正解 (其正解的存在性可参见定理 1.3.1 和注 1.3.1).

证明 容易看出, 问题 (9.6.1) 中的方程的右端项满足条件 (H1) 和 (H2). 明显地, $\bar{u} = \alpha$ 是问题 (9.6.1) 的一个上解. 我们再根据不同情况来寻找下解.

(1) $p > q$ 的情形: 取 $B = B(x_0, r)$, 定义 $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} \gamma\phi_B(x), & x \in B, \\ 0, & x \in \Omega \setminus B, \end{cases}$$

其中 $\phi_B(x)$ 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u, & x \in B, \\ u = 0, & x \in \partial B \end{cases}$$

的主特征值 $\lambda_{1,p}^B(0)$ 对应的特征函数, $0 < \phi_B(x) \leqslant 1$, $0 < \gamma < \min\{\delta, \alpha\}$ 满足 $\gamma^{p-q} \leqslant \varepsilon/\lambda_{1,p}^B(0)$. 根据假设条件, 对于所有的 $s \in [0, \gamma]$ 和几乎所有的 $x \in B$,

$$\lambda_{1,p}^B(0)s^{p-1} \leqslant \varepsilon s^{q-1} \leqslant s^{q-1}h(x, s)$$

成立. 故对于所有的 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x &= \int_B |\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial B} |\nabla\underline{u}|^{p-2}\frac{\partial\underline{u}}{\partial v}\phi \mathrm{d}x + \lambda_{1,p}^B(0)\int_B \underline{u}^{p-1}\phi \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_\Omega \underline{u}^{q-1}h(x, \underline{u})\phi \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

这说明 $\underline{u}$ 是一个下解. 此外, $\underline{u} < \alpha = \bar{u}$. 故问题 (9.6.1) 至少有一个非平凡的非负解 $u \in \langle\underline{u}, \bar{u}\rangle$.

如果 $h(x, u) \geqslant 0$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 和所有 $u \in [0, \alpha]$ 成立, 因为 $0 \leqslant u \leqslant \bar{u} = \alpha$, $u \not\equiv 0$, 所以 $h(x, u) \geqslant 0, \not\equiv 0$. 如若不然, 则 u 满足

$$-\Delta_p u|_\Omega = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

由解的唯一性, $u \equiv 0$. 得到一个矛盾. 因而 $h(x, u) \geqslant 0, \not\equiv 0$. 再由强最大值原理, 在 Ω 内 $u > 0$.

此外, 如果 h 关于 x 和 u 是连续的, 并且关于 u 是单调不增的, 我们将证明定理中给出的充分条件也是必要的. 假设问题 (9.6.1) 有一个非平凡的非负解 u, 并且定理中给出的充分条件不成立, 那么由 h 的连续性知 $h(x, 0) \leqslant 0$ 在 Ω 内成立. 于是

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{q-1}h(x,u) \leqslant u^{q-1}h(x,0) \leqslant 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

根据定理 9.3.3 可得 $u \leqslant 0$. 这是一个矛盾.

(2) $p = q$ 的情形: 取 $\gamma > 0$, 使得 $g(\gamma) + \lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big) < 0$, 其中函数 g 由条件 (H2) 给出. 那么对所有的 $u \in [0,\gamma]$ 和几乎所有的 $x \in \Omega$, 都有

$$\begin{aligned} h(x,0) + \lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big) &\leqslant h(x,u) + g(u) + \lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big) \\ &\leqslant h(x,u) + g(\gamma) + \lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big) \\ &\leqslant h(x,u). \end{aligned}$$

记 ψ_1 是与 $\lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big)$ 对应的正特征函数, 并且 $\psi_1 \leqslant 1$, 考虑函数 $\underline{u} = \gamma\psi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. 那么对于任给的 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x &= \int_\Omega \big[h(x,0) + \lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big)\big]\underline{u}^{p-1}\phi \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_\Omega \underline{u}^{p-1}h(x,\underline{u})\phi \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

这说明 $\underline{u}$ 是问题 (9.6.1) 的一个正下解. 又因为

$$\begin{aligned} g(\gamma) &< -\lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big) \leqslant -\lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,\alpha) - g(\alpha)\big) \\ &= -\lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,\alpha)\big) + g(\alpha) \leqslant -\lambda_{1,p}(0) + g(\alpha) < g(\alpha), \end{aligned}$$

并且 g 是增函数, 所以 $\gamma < \alpha$, 进而有 $\underline{u} < \overline{u}$ 于 Ω 内几乎处处成立. 故问题 (9.6.1) 存在正解 $u \in \langle \underline{u}, \alpha \rangle$.

此外, 如果 h 关于 u 是单调不增的, $h(x,u) \not\equiv h(x,0)$ 对于所有的正函数 u 成立, 并且问题 (9.6.1) 有一个非平凡的非负解 u, 取一个充分大的正常数 M, 使得 $M + h(x,u(x)) > 0$, 则有

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Mu^{p-1} = u^{q-1}\big(h(x,u) + M\big) \geqslant 0, \not\equiv 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由于 $\lambda_{1,p}(M) > 0$, 故强最大值原理成立. 从而在 Ω 内 $u > 0$, 所以 $h(x,u) \leqslant, \not\equiv h(x,0)$. 于是

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p}\big(-h(\cdot,0)\big) &\leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x,0)u^p \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega u^p \mathrm{d}x} \\ &< \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x,u)u^p \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega u^p \mathrm{d}x} = 0. \end{aligned}$$

(3) $p < q < p^*$ 的情形: 取 θ 是问题 (9.6.2) 的一个正解, $\beta = \|\theta\|_\infty$, γ 由定理的条件给出. 考察 $\underline{u} = \gamma\theta \in W_0^{1,p}(\Omega)$. 那么对任意 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x &= \gamma^{p-1}\int_\Omega \theta^{q-1}\phi\mathrm{d}x = \gamma^{p-q}\int_\Omega \underline{u}^{q-1}\phi\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_\Omega \underline{u}^{q-1}h(x,\gamma\beta)\phi\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \underline{u}^{q-1}h(x,\underline{u})\phi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这说明 $\underline{u}$ 是问题 (9.6.1) 的一个正下解. 显然有 $\underline{u}(x) \leqslant \gamma\beta \leqslant \alpha \equiv \bar{u}$. 因此问题 (9.6.1) 有一个正解. 证毕.

9.6.2 一个非线性特征值问题

本小节考虑下面的非线性特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = \lambda|u|^{p-2}u - f(u), & x \in \Omega,\\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{9.6.3}$$

其中 $a(x) \in L^\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$, 函数 $f \in C^1([0,\infty))$ 并满足下面的条件:

(A1) 当 $s > 0$ 时, $f(s) > 0$, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{s\to 0^+} F(s) = \alpha \geqslant 0$;

(A2) 在 $(0,\infty)$ 内 $F'(s) > 0$, $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = \infty$,

其中 $F(s) = f(s)/s^{p-1}$.

同上, 记 $\lambda_{1,p}(a)$ 是问题 (9.2.3) 的主特征值, ϕ_1 是与其对应的正特征函数, 并认为 $\|\phi_1\|_\infty = 1$. 记 $\Lambda_\alpha = \lambda_{1,p}(a) + \alpha$.

定理 9.6.2 *问题 (9.6.3) 存在属于 $C^1(\bar{\Omega})$ 的正解当且仅当 $\lambda > \Lambda_\alpha$, 而且对每个 $\lambda > \Lambda_\alpha$, 问题 (9.6.3) 的正解唯一, 记为 $\theta_{[\lambda,a]}$. 进一步还有, $\theta_{[\lambda,a]}$ 关于 $a(x)$ 单减, 关于 λ 严格单增, 并且*

$$\lim_{\lambda\searrow\Lambda_\alpha}\theta_{[\lambda,a]} = 0 \ \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 上一致成立}. \tag{9.6.4}$$

证明 **第一步** 证明当 $\lambda > \Lambda_\alpha$ 时, 问题 (9.6.3) 有唯一正解.

因为 $\lambda > \Lambda_\alpha$, 我们断言: 当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时, $\varepsilon\phi_1$ 是问题 (9.6.3) 一个下解. 事实上, 记 $\lambda = \Lambda_\alpha + \delta = \lambda_{1,p}(a) + \alpha + \delta$, 则 $\delta > 0$. 于是存在 $\varepsilon_0 > 0$, 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时, 有

$$0 < f(\varepsilon\phi_1) < \delta(\varepsilon\phi_1)^{p-1} + \alpha(\varepsilon\phi_1)^{p-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}-\Delta_p(\varepsilon\phi_1) + a(\varepsilon\phi_1)^{p-1} &= (\lambda - \delta - \alpha)(\varepsilon\phi_1)^{p-1}\\ &< \lambda(\varepsilon\phi_1)^{p-1} - f(\varepsilon\phi_1).\end{aligned}$$

故断言成立. 另外, 经简单计算知, 充分大的正常数 M 是问题 (9.6.3) 的一个上解. 利用上下解方法便可推得问题 (9.6.3) 有正解 $\theta_{[\lambda,a]}\in C^1(\bar{\Omega})$. 正解的唯一性可由定理 9.3.4 直接得到.

第二步　证明当 $\lambda\leqslant \Lambda_\alpha$ 时, 问题 (9.6.3) 没有正解.

假设对于某个 $\lambda\leqslant\Lambda_\alpha$, 问题 (9.6.3) 有正解 u, 则有

$$\begin{cases} -\Delta_p u+\left(a(x)-\lambda+\dfrac{f(u)}{u^{p-1}}\right)u^{p-1}=0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

利用条件 (A1), (A2) 和定理 9.2.2 得

$$0=\lambda_{1,p}\left(a-\lambda+\frac{f(u)}{u^{p-1}}\right)>\lambda_{1,p}(a-\lambda+\alpha)=\lambda_{1,p}(a)-\lambda+\alpha,$$

故 $\lambda>\lambda_{1,p}(a)+\alpha$. 这与条件 $\lambda\leqslant\Lambda_\alpha$ 矛盾.

第三步　证明 $\theta_{[\lambda,a]}$ 关于 $a(x)$ 和 λ 的单调性.

利用正解的唯一性和上下解方法易证, $\theta_{[\lambda,a]}$ 关于 $a(x)$ 是单调减少的 (习题 9.9).

假设 $\lambda_1>\lambda>\Lambda_\alpha$. 为了书写方便, 简记 $\theta_{[\lambda_1,a]}=u_1$. 对于 $0<\tau\ll 1$, 令 $v=(1-\tau)u_1$, 则有

$$\begin{aligned}
&-\Delta_p v+a(x)v^{p-1}+f(v)\\
=&(1-\tau)^{p-1}\big[-\Delta_p u_1+a(x)u_1^{p-1}+f(u_1)\big]+f(v)-(1-\tau)^{p-1}f(u_1)\\
=&(1-\tau)^{p-1}\lambda_1u_1^{p-1}+v^{p-1}F(v)-(1-\tau)^{p-1}u_1^{p-1}F(u_1)\\
=&(1-\tau)^{p-1}u_1^{p-1}\big[\lambda_1+F(v)-F(u_1)\big]\\
=&(1-\tau)^{p-1}u_1^{p-1}\big[\lambda_1-\tau F'(\xi)u_1\big],\quad 其中\ v\leqslant\xi\leqslant u_1.
\end{aligned}$$

由于 $\lambda_1>\lambda$, 故当 $0<\tau\ll1$ 时有 $\lambda_1-\tau F'(\xi)u_1>\lambda$, 于是

$$-\Delta_p v+a(x)v^{p-1}+f(v)>\lambda(1-\tau)^{p-1}u_1^{p-1}=\lambda v^{p-1}.$$

又因为在 $\partial\Omega$ 上 $v=0$, 所以 $(1-\tau)u_1=v$ 是问题 (9.6.3) 的一个上解. 利用定理 9.3.1 容易推得 $\dfrac{\partial u_1}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}<0$. 从而有 $\dfrac{\partial v}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}<0$. 再利用引理 2.2.1 可以推出, 当 $\varepsilon>0$ 适当小时, 在 Ω 内 $\varepsilon\phi_1<v$ 成立. 根据第一步的证明以及正解的唯一性, 问题 (9.6.3) 的正解 $\theta_{[\lambda,a]}$ 满足: $\theta_{[\lambda,a]}\leqslant v$. 因而在 Ω 内 $\theta_{[\lambda,a]}<u_1=\theta_{[\lambda_1,a]}$.

第四步　证明极限 (9.6.4).

根据命题 9.1.1 和第三步的结论可以推知, 当 $\lambda\searrow\Lambda_\alpha$ 时, 在空间 $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$ 中极限 $\lim\limits_{\lambda\searrow\Lambda_\alpha}\theta_{[\lambda,a]}=\theta$ 存在, 并且 θ 是 $\lambda=\Lambda_\alpha$ 时问题 (9.6.3) 的非负解. 如果 $\theta\neq0$,

利用强极值原理可以推出 $\theta > 0$. 这与问题 (9.6.3) 在 $\lambda = \Lambda_\alpha$ 时没有正解矛盾. 所以 $\theta \equiv 0$. 定理得证.

推论 9.6.1 记 $a_l = \inf_\Omega a(x)$. 则有

$$\theta_{[\lambda,a]} \leqslant F^{-1}(\lambda - a_l), \quad \forall\, \lambda > \Lambda_\alpha.$$

证明 观察问题 (9.6.3) 可知, $\theta_{[\lambda,a]}$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (\lambda - a_l)|u|^{p-2}u - f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.6.5}$$

的正下解, 充分大的正常数是问题 (9.6.5) 的上解. 因而问题 (9.6.5) 存在唯一正解, 记为 $\theta_{[\lambda,a_l]}$. 利用定理 9.2.2 和定理 9.6.2,

$$\lambda - a_l > \lambda_{1,p}(0) + \alpha > 0, \tag{9.6.6}$$

$$\theta_{[\lambda,a]} \leqslant \theta_{[\lambda,a_l]}.$$

把问题 (9.6.5) 改写为

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (\lambda - a_l - F(u))|u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{9.6.7}$$

则由条件 (A2) 和式 (9.6.6) 得 $F^{-1}(\lambda - a_l) > 0$. 显然 $F^{-1}(\lambda - a_l)$ 是问题 (9.6.7) 的正的严格上解, 故是问题 (9.6.5) 的正的严格上解. 而当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, $\varepsilon\phi_1$ 是问题 (9.6.5) 的正下解. 利用上下解方法和正解的唯一性, $\theta_{[\lambda,a_l]} \leqslant F^{-1}(\lambda - a_l)$. 于是

$$\theta_{[\lambda,a]} \leqslant \theta_{[\lambda,a_l]} \leqslant F^{-1}(\lambda - a_l).$$

推论得证.

下面给出当 $\lambda \nearrow \infty$ 时, $\theta_{[\lambda,a]}$ 的变化规律.

定理 9.6.3 假设 $\lambda > \Lambda_\alpha$, 则有

$$\theta_{[\lambda,a]} \geqslant F^{-1}(\lambda - \lambda_{1,p}(a))\phi_1,$$

而且 $\lim\limits_{\lambda \nearrow \infty} F^{-1}(\lambda - \lambda_{1,p}(a)) = \infty$.

证明 由条件 (A2), F 在 $(0,\infty)$ 中是严格递增函数. 当 $\lambda > \Lambda_\alpha = \lambda_{1,p}(a) + \alpha$ 时, 我们将证明 $F^{-1}\big(\lambda - \lambda_{1,p}(a)\big)\phi_1$ 是问题 (9.6.3) 的下解. 事实上, 对于 $\varepsilon > 0$, 若

$$F(\varepsilon\phi_1) \leqslant \lambda - \lambda_{1,p}(a) \tag{9.6.8}$$

成立, 则 $\varepsilon\phi_1$ 是问题 (9.6.3) 的一个下解. 取 $\varepsilon = F^{-1}\big(\lambda - \lambda_{1,p}(a)\big)$, 由函数 F 的单调性知式 (9.6.8) 成立. 利用正解的唯一性又知

$$\theta_{[\lambda,a]} \geqslant \varepsilon\phi_1 = F^{-1}\big(\lambda - \lambda_{1,p}(a)\big)\phi_1.$$

又根据 $\lim\limits_{s\nearrow\infty} F^{-1}(s) = \infty$ 得

$$\lim_{\lambda\nearrow\infty} F^{-1}\big(\lambda - \lambda_{1,p}(a)\big) = \infty.$$

定理证毕.

9.7 p-Laplace 方程组

本节讨论 p-Laplace 方程组的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{q-1}h(x,u,v), & x \in \Omega, \\ -\Delta_p v = v^{q-1}k(x,u,v), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.7.1}$$

解的存在性, 其中 $p, q > 1$, h, k 满足

(HK1) 函数 $h(x,u,v)$, $k(x,u,v)$ 都是 Carathéodory 函数, 并且当 u, v 属于有界集时, $h(\cdot,u,v)$ 和 $k(\cdot,u,v)$ 都有界;

(HK2) 存在连续增函数 $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 满足 $g(0) = 0$, 并且对几乎所有的 $x \in \Omega$, 映射 $u \longmapsto g(u) + h(x,u,v)$ 对于任意给定的 v 关于 u 是单调不减的, 映射 $v \longmapsto g(v) + h(x,u,v)$ 对于任意给定的 u 关于 v 是单调不减的.

我们先讨论下面的方程组的边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x,u,v), & x \in \Omega, \\ -\Delta_p v = k(x,u,v), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{9.7.2}$$

定义 9.7.1 函数 $\bar{u}, \bar{v}, \underline{u}, \underline{v} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 被称为问题 (9.7.2) 的有序上下解, 如果

(a) $\begin{cases} \underline{u}(x) \leqslant \bar{u}(x), \quad \underline{v}(x) \leqslant \bar{v}(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \\ \underline{u}(x) \leqslant 0 \leqslant \bar{u}(x), \quad \underline{v}(x) \leqslant 0 \leqslant \bar{v}(x), \quad x \in \partial\Omega; \end{cases}$

(b) 对任意的 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$, 有

$$\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^{p-2}\nabla\bar{u}\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega h(x,\bar{u},v)\phi\mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in \langle\underline{v},\bar{v}\rangle,$$

$$\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega h(x,\underline{u},v)\phi\mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in \langle\underline{v},\bar{v}\rangle,$$

$$\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^{p-2}\nabla\bar{v}\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega k(x,u,\bar{v})\phi\mathrm{d}x, \quad \forall\, u \in \langle\underline{u},\bar{u}\rangle,$$

$$\int_\Omega |\nabla\underline{v}|^{p-2}\nabla\underline{v}\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega k(x,u,\underline{v})\phi\mathrm{d}x, \quad \forall\, u \in \langle\underline{u},\bar{u}\rangle.$$

定理 9.7.1 假设条件 (HK1) 和 (HK2) 成立, $\bar{u}, \bar{v}, \underline{u}, \underline{v} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ 是问题 (9.7.2) 的有序上下解. 那么问题 (9.7.2) 至少存在一个弱解 $(u,v) \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \bar{v} \rangle$.

处理方程式的方法结合 $p=2$ 时处理方程组的方法, 可以证明该定理. 留作习题.

下面讨论问题 (9.7.1).

定理 9.7.2 假设 h,k 满足条件 (HK1) 和 (HK2), 并且存在 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 使得 $h(x,\alpha_1,v) \leqslant 0$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 和所有的 $v \in [0,\alpha_2]$ 成立, $k(x,u,\alpha_2) \leqslant 0$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 和所有的 $u \in [0,\alpha_1]$ 成立. 那么问题 (9.7.1) 存在一个非平凡的非负解 (u,v) (对于 $p>q$ 的情形), 或者正解 (u,v) (对于 $p \leqslant q < p^*$ 的情形) 的充分条件是:

(1) $p > q$ 的情形: 存在 $x_i \in \Omega$, $r_i, \varepsilon_i, \delta_i > 0$, $i=1,2$, 使得

$$h(x,u,v) \geqslant \varepsilon_1, \quad \text{a.e. } x \in B(x_1,r_1) \subset \Omega, \quad \forall\, u \in (0,\delta_1], \quad v \in [0,\alpha_2],$$

$$k(x,u,v) \geqslant \varepsilon_2, \quad \text{a.e. } x \in B(x_2,r_2) \subset \Omega, \quad \forall\, u \in [0,\alpha_1], \quad v \in (0,\delta_2].$$

如果 $h(x,u,v) \geqslant 0$, $k(x,u,v) \geqslant 0$ 对几乎所有的 $x \in \Omega$ 和所有 $(u,v) \in [0,\alpha_1] \times [0,\alpha_2]$ 成立, 那么这个非平凡的非负解在 Ω 内是正的;

(2) $p = q$ 的情形: 存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\begin{cases} h(x,0,v) > \lambda_{1,p}(0) + \varepsilon, & \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall\, v \in [0,\alpha_2], \\ k(x,u,0) > \lambda_{1,p}(0) + \varepsilon, & \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall\, u \in [0,\alpha_1]; \end{cases}$$

(3) $p < q < p^*$ 的情形: 函数 $u \longmapsto h(x,u,v)$ 和 $v \longmapsto k(x,u,v)$ 都是单调不增的, 并且存在 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, 使得

$$\begin{cases} \gamma_1^{p-q} \leqslant h(x,\gamma_1\beta,v), & \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall\, v \in (0,\alpha_2], \\ \gamma_2^{p-q} \leqslant k(x,u,\gamma_2\beta), & \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall\, u \in (0,\alpha_1], \end{cases}$$

其中 β 的定义同于定理 9.6.1.

证明 先定义

$$\bar{u} = \alpha_1 > 0, \quad \bar{v} = \alpha_2 > 0,$$

再按照如下方式定义 $\underline{u}, \underline{v} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$:

(1) 当 $p > q$ 时, 取

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} \gamma_1\varphi_1(x), & x \in B_1, \\ 0, & x \in \Omega \setminus B_1, \end{cases} \qquad \underline{v}(x) = \begin{cases} \gamma_2\varphi_2(x), & x \in B_2, \\ 0, & x \in \Omega \setminus B_2, \end{cases}$$

其中 $B_1 = B(x_1,r_1)$, $B_2 = B(x_2,r_2)$, $\varphi_i(x)$ 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u, & x \in B_i, \\ u = 0, & x \in \partial B_i \end{cases}$$

的主特征值 $\lambda_1(B_i, 0)$ 对应的单位化的正特征函数, 即 $\max_{\overline{B}_i} \varphi_i = 1$, $\gamma_i \in (0, \delta_i]$ 满足 $\gamma_i^{p-q} \leqslant \dfrac{\varepsilon_i}{\lambda_1(B_i, 0)}$, $i = 1, 2$.

(2) 当 $p = q$ 时, 取 $\gamma > 0$ 使得 $g(\gamma) \leqslant \varepsilon$. 定义 $\underline{u} = \underline{v} = \gamma\phi_p(x)$, 其中 $\phi_p(x)$ 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值 $\lambda_{1,p}$ 对应的单位化的正特征函数, 即 $\max_{\overline{\Omega}} \phi_p = 1$.

(3) 当 $p < q < p^*$ 时, 取 $\underline{u} = \gamma_1\theta$, $\underline{v} = \gamma_2\theta$, 其中 θ 是问题 (9.6.2) 的正解, $\beta = \|\theta\|_\infty$.

同于定理 9.6.1 的证明易证, 上面确定的函数 $\bar{u}, \bar{v}, \underline{u}, \underline{v}$ 是问题 (9.7.1) 的有序上下解. 余下的证明类似于定理 9.6.1. 证毕.

最后, 我们讨论一般形式的方程组的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u = h(x, u, v), & x \in \Omega, \\ -\Delta_{p_2} v = k(x, u, v), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9.7.3}$$

解的存在性, 其中 $p_i > 1$, $i = 1, 2$, 函数 h, k 满足条件 (HK1) 和 (HK2).

定义 9.7.2 函数

$$\bar{u},\ \underline{u} \in W^{1,p_1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \bar{v},\ \underline{v} \in W^{1,p_2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

称为问题 (9.7.3) 的有序上下解, 如果

(a) $\begin{cases} \underline{u}(x) \leqslant \bar{u}(x), \quad \underline{v}(x) \leqslant \bar{v}(x), & \text{a.e. } x \in \Omega, \\ \underline{u}(x) \leqslant 0 \leqslant \bar{u}(x), \quad \underline{v}(x) \leqslant 0 \leqslant \bar{v}(x), & x \in \partial\Omega; \end{cases}$

(b) 对任意的 $\phi \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$, $\psi \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$, $\psi \geqslant 0$, 有

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{p_1-2} \nabla \bar{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega h(x, \bar{u}, v)\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in \langle \underline{v}, \bar{v} \rangle,$$

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p_1-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega h(x, \underline{u}, v)\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in \langle \underline{v}, \bar{v} \rangle,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{v}|^{p_2-2} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \psi \mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega} k(x, u, \bar{v}) \psi \mathrm{d}x, \quad \forall\, u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \underline{v}|^{p_2-2} \nabla \underline{v} \cdot \nabla \psi \mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega} k(x, u, \underline{v}) \psi \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in \langle \underline{v}, \bar{v} \rangle.$$

定理 9.7.3 假设条件 (HK1) 和 (HK2) 成立, 函数

$$\bar{u}, \underline{u} \in W^{1,p_1}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega), \quad \bar{v}, \underline{v} \in W^{1,p_2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$$

是问题 (9.7.3) 的有序上下解. 那么问题 (9.7.3) 至少存在一个弱解 $(u, v) \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \bar{v} \rangle$.

证明留作习题.

习 题 9

9.1 设 $p \geqslant 2$, 试证明 Clarkson 不等式:

$$|v_1|^p + |v_2|^p \geqslant 2 \left| \frac{v_1 + v_2}{2} \right|^p + 2 \left| \frac{v_1 - v_2}{2} \right|^p, \quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n.$$

9.2 假设 $1 < p < 2$, 向量 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, 并且存在 $t \in [0, 1]$, 使得 $v_1 + t(v_2 - v_1) = 0$. 试证明

$$|v_2|^p - |v_1|^p \geqslant p |v_1|^{p-2} v_1 \cdot (v_2 - v_1) + \frac{3p(p-1)}{16} \frac{|v_2 - v_1|^2}{(|v_1| + |v_2|)^{2-p}}.$$

9.3 证明引理 9.2.3.

9.4 证明定理 9.2.2.

9.5 利用定理 2.6.2 的处理方法, 证明定理 9.2.3.

9.6 证明式 (9.3.7).

9.7 证明式 (9.4.6).

9.8 证明式 (9.4.14).

9.9 利用函数 $g(q)$ 的凹性和式 (9.4.15) 证明极限 (9.4.13) 存在.

9.10 证明当 $\lambda > \Lambda_\alpha$ 时, 问题 (9.6.3) 的唯一正解 $\theta_{[\lambda, a]}$ 关于 $a(x)$ 是单调减少的.

9.11 证明定理 9.7.1.

9.12 证明定理 9.7.3.

附录 A　Sobolev 空间的若干结论

为了便于读者查阅, 在该附录中我们列出几个常用不等式和一些 Sobolev 空间的基本结论. 这些结论都可以在文献 [43] 中找到.

A.1　几个常用不等式

定理 A.1.1　设 $p \geqslant 1$. 那么对于任意的数 a 和 b, 有

$$(|a|+|b|)^p \leqslant 2^{p-1}\left(|a|^p+|b|^p\right).$$

定理 A.1.2 (Jensen 不等式)　设 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数, u 是 (a,b) 上的可积函数. 则

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u(t))\mathrm{d}t.$$

定理 A.1.3 (Young 不等式)　设 $a,b>0$, $p,q>1$ 且满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

定理 A.1.4 (带 ε 的 Young 不等式)　设 $a,b,\varepsilon>0,p,q>1$ 且满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{\varepsilon^{-q/p}}{q}b^q.$$

定理 A.1.5 (离散形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式)　设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $q=p/(p-1)$, 则有

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q},$$

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p},$$

这里, 当 $p=\infty$ 时, 认定 $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}=\max\limits_k |b_k|$.

定理 A.1.6 (Hölder 不等式)　设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $q=p/(p-1)$. 若 $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$, 则 $uv \in L^1(\Omega)$, 并且还有

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|u\|_p\|v\|_q.$$

定理 A.1.7 (Minkowski 不等式)　设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $u, v \in L^p(\Omega)$. 则 $u+v \in L^p(\Omega)$ 并且有

$$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p.$$

定理 A.1.8 (逆 Hölder 不等式)　假设 $0 < p < 1$, 由此知 $p' = p/(p-1) < 0$. 假定 $u \in L^p(\Omega)$ 并且

$$0 < \int_\Omega |v(x)|^{p'} \mathrm{d}x < \infty,$$

则有

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v(x)|^{p'} \mathrm{d}x\right)^{1/p'}$$

定理 A.1.9 (逆 Minkowski 不等式)　假设 $0 < p < 1$. 如果 $u, v \in L^p(\Omega)$, 则有

$$\||u| + |v|\|_p \geqslant \|u\|_p + \|v\|_p.$$

A.2　空间 $L^p(\Omega)$ 和 $W^{k,p}(\Omega)$ 的几个重要性质

设 $f \in L^p(\Omega)$. 称 f 是整体连续的 (有时也称为经过自变量的平移关于范数是连续的), 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < \delta$ 时, 有

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

用 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包.

定理 A.2.1　假设 Ω 有界, $1 \leqslant p < \infty$. 那么 $L^p(\Omega)$ 中的函数是整体连续的.

定理 A.2.2　假设 $|\Omega| < \infty$.

(1) 如果 $u \in L^\infty(\Omega)$, 那么对于所有的 $1 \leqslant p < \infty$, 都有 $u \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty.$$

(2) 如果对于所有的 $1 \leqslant p < \infty$, 都有 $u \in L^p(\Omega)$, 并且存在正常数 C 使得

$$\|u\|_p \leqslant C, \ \ \forall\, 1 \leqslant p < \infty,$$

那么 $u \in L^\infty(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_\infty \leqslant C.$$

定理 A.2.3 (空间 $L^p(\Omega)$ 中的内插不等式)　设 $u \in L^p(\Omega)$, $q < r < p$, $\alpha \in (0,1)$ 且满足 $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{q} + \dfrac{1-\alpha}{p}$, 则

$$\|u\|_r \leqslant \|u\|_q^\alpha \|u\|_p^{1-\alpha}.$$

定理 A.2.4　如果 $1 \leqslant p < \infty$, 那么 $L^p(\Omega)$ 是可分的.

定理 A.2.5　当 $1 < p < \infty$ 时, 空间 $L^p(\Omega)$ 是一致凸的, 从而是自反的.

定理 A.2.6 假设 $1 \leqslant p < \infty$, 那么有界集 $K \subset L^p(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是准紧的当且仅当

(1) 集合 K 是一致整体连续的, 即对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|h| < \delta$ 时, 有

$$\int_\Omega |u(x+h) - u(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon, \quad \forall\, u \in K;$$

(2) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在子集 $G \subset\subset \Omega$, 使得

$$\int_{\Omega \setminus \bar{G}} |u(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p, \quad \forall\, u \in K.$$

定理 A.2.7 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, 我们有

(1) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$;

(2) $W^{0,p}(\Omega) = W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

但是对一般区域 Ω, 当 $k \geqslant 1$ 时, $W_0^{k,p}(\Omega)$ 可能是 $W^{k,p}(\Omega)$ 的真子空间.

定理 A.2.8 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $W^{k,p}(\Omega)$ 是可分的. 当 $1 < p < \infty$ 时, $W^{k,p}(\Omega)$ 是一致凸的, 从而也是自反的. 所以当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $W^{k,p}(\Omega)$ 中的任意有界集都是准弱紧的.

A.3 Sobolev 不等式

定理 A.3.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leqslant p < n$. 则存在正常数 $C = C(n, p, \Omega)$, 使得

$$\|u\|_{p^*} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

其中 $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.

定理 A.3.2 (Poincaré 不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $1 \leqslant p < n$. 则对于任给的 $q \in [1, p^*]$, 都存在正常数 $C = C(n, p, q, \Omega)$, 使得

$$\|u\|_q \leqslant C \|\nabla u\|_p, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

定理 A.3.3 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在正常数 $C = C(\varepsilon, n, p, \Omega)$, 使得对任何满足

$$|\{x \in \Omega : u = 0\}| \geqslant \varepsilon |\Omega|$$

的 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 都有

$$\|u\|_p \leqslant C \|\nabla u\|_p.$$

记 $u_\Omega = \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega u \,\mathrm{d}x$, 称之为函数 u 在 Ω 上的平均.

定理 A.3.4 (Poincaré 不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则存在正常数 $C = C(n,p,\Omega)$, 使得

$$\|u - u_\Omega\|_p \leqslant C\|\nabla u\|_p, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

特别地, 当 $1 \leqslant p < n$ 时, 对任意 $q \in [1,p^*]$, 都存在正常数 $C = C(n,p,q,\Omega)$, 使得

$$\|u - u_\Omega\|_q \leqslant C\|\nabla u\|_p, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

定理 A.3.5 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial\Omega \in C^1$, $n < p \leqslant \infty$. 则存在正常数 $C = C(n,p,\Omega)$, 使得对于任给的 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, 改变 u 在零测集上的值之后, $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\alpha = 1 - n/p$, 并且还有

$$|u|_\alpha \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

定理 A.3.6 (空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的内插不等式) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, j, k 是整数, $0 \leqslant j < k$, $r \geqslant 1$, $j/k \leqslant \alpha \leqslant 1$, 并且满足

(1) $\dfrac{1}{q} = \dfrac{j}{n} + \alpha\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{n}\right) + \dfrac{1-\alpha}{r}$;

(2) 当 $n > pk$ 时 $r \leqslant \dfrac{np}{n-pk}$, 当 $n \leqslant pk$ 时 $r \leqslant \infty$;

(3) $\begin{cases} \dfrac{nr}{n+rj} \leqslant q \leqslant \dfrac{np}{n-p(k-j)}, & \text{当 } n > p(k-j) \text{ 时}, \\ \dfrac{nr}{n+rj} \leqslant q < \infty, & \text{当 } n \leqslant p(k-j) \text{ 时}. \end{cases}$

那么存在常数 $C = C(p,r,j,k,\alpha,n,\Omega)$, 使得

$$\|D^j u\|_q \leqslant C\|D^k u\|_p^\alpha \|u\|_r^{1-\alpha}, \quad \forall\, u \in W_0^{k,p}(\Omega).$$

再利用带 ε 的 Young 不等式又得到, 若 $0 < \alpha < 1$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\|D^j u\|_q \leqslant \varepsilon\|D^k u\|_p + C\varepsilon^{\alpha/(\alpha-1)}\|u\|_r, \quad \forall\, u \in W_0^{k,p}(\Omega).$$

特别地, 当 $r = q = p$ 时有

$$\|D^j u\|_p \leqslant \varepsilon\|D^k u\|_p + C\varepsilon^{j/(j-k)}\|u\|_p, \quad \forall\, u \in W_0^{k,p}(\Omega).$$

如果 $\partial\Omega \in C^1$, 或者 $\Omega = \mathbb{R}^N$, 那么上述结论对于 $u \in W^{k,p}(\Omega)$ 也成立.

A.4 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的嵌入

定理 A.4.1 假设 $n = 1$. 则当 Ω 为有界开集时, $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$; 当 Ω 为无界开集时, $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow C_b(\Omega) := C_b^0(\Omega)$.

定理 A.4.2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial\Omega\in C^1$.

(1) 当 $kp<n$ 时, 对于任意的 $1\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-kp}$, 有 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 其中嵌入常数 C 只依赖于 n,k,p,q 和 Ω;

(2) 当 $kp=n$ 时, 对于任意的 $1\leqslant q<\infty$, 有 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 其中嵌入常数 C 只依赖于 n,k,q 和 Ω;

(3) 当 $kp>n$ 时, $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 其中

$$\alpha\leqslant\alpha_0:=\begin{cases}\left[\dfrac{n}{p}\right]+1-\dfrac{n}{p}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 不是整数},\\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 是整数},\end{cases}$$

并且嵌入常数 C 只依赖于 n,k,p,α 和 Ω.

推论 A.4.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集.

(1) 当 $kp<n$ 时, 对于任意的 $1\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-kp}$, 有 $W_0^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 C 只依赖于 n,k,p,q 和 Ω;

(2) 当 $kp=n$ 时, 对于任意 $1\leqslant q<\infty$, 有 $W_0^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 C 只依赖于 n,k,q 和 Ω;

(3) 当 $kp>n$ 时, $W_0^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 其中

$$\alpha\leqslant\alpha_0:=\begin{cases}\left[\dfrac{n}{p}\right]+1-\dfrac{n}{p}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 不是整数},\\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 是整数},\end{cases}$$

并且嵌入常数 C 只依赖于 n,k,p,α 和 Ω.

A.5 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的紧嵌入

定理 A.5.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial\Omega\in C^1$, $1\leqslant p<n$. 那么对任意的 $1\leqslant q<p^*$, 有

$$W^{1,p}(\Omega)\overset{\text{紧}}{\hookrightarrow}L^q(\Omega).$$

推论 A.5.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集.

(1) 对于任意的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 有 $W_0^{1,p}(\Omega)\overset{\text{紧}}{\hookrightarrow}L^p(\Omega)$;

(2) 若 $\partial\Omega\in C^1$, 则对于任意的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 有 $W^{1,p}(\Omega)\overset{\text{紧}}{\hookrightarrow}L^p(\Omega)$.

推论 A.5.2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial\Omega\in C^1$, k 是正整数, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

(1) 当 $kp < n$ 时, 对于任意的 $1 \leqslant q < \dfrac{np}{n-kp}$, 有 $W^{k,p}(\Omega) \overset{紧}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 C 只依赖于 n, k, p, q 和 Ω;

(2) 当 $kp = n$ 时, 对于任意的 $1 \leqslant q < \infty$, 有 $W^{k,p}(\Omega) \overset{紧}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 C 只依赖于 n, k, q 和 Ω;

(3) 当 $kp > n$ 时, 对于任意的 $0 < \alpha < \alpha_0$, 有 $W^{k,p}(\Omega) \overset{紧}{\hookrightarrow} C^{k-[\frac{n}{p}]-1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 其中

$$\alpha_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 不是整数}, \\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 是整数}, \end{cases}$$

并且嵌入常数 C 只依赖于 n, k, p, α 和 Ω.

推论 A.5.3　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, k 是正整数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(1) 当 $kp < n$ 时, 对于任意的 $q < \dfrac{np}{n-kp}$, 有 $W_0^{k,p}(\Omega) \overset{紧}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 C 只依赖于 n, k, p, q 和 Ω;

(2) 当 $kp = n$ 时, 对于任意的 $1 \leqslant q < \infty$, 有 $W_0^{k,p}(\Omega) \overset{紧}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, 并且嵌入常数 C 只依赖于 n, k, q 和 Ω;

(3) 当 $kp > n$ 时, 对于任意的 $0 < \alpha < \alpha_0$, 有 $W_0^{k,p}(\Omega) \overset{紧}{\hookrightarrow} C^{k-[\frac{n}{p}]-1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 其中

$$\alpha_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 不是整数}, \\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{如果 } \dfrac{n}{p} \text{ 是整数}, \end{cases}$$

并且嵌入常数 C 只依赖于 n, k, p, α 和 Ω.

附录 B 二阶线性椭圆型方程的若干结论

为了便于读者查阅, 在该附录中我们列出一些关于二阶线性椭圆型方程的基本结论. 除去标明参考文献的结论之外, 其余结论都可以在文献 [44] 中找到.

B.1 极 值 原 理

极值原理通常又称为最大值原理. 除非特别说明, 正文中提到的极值原理或者最大值原理, 指的是下面的弱极值原理和强极值原理的统称, 有的地方是指弱极值原理, 有的地方是指强极值原理. 读者只要细心验证一下条件并比对结论, 就很容易辨别.

在区域 Ω 内考虑二阶线性椭圆型方程

$$\mathscr{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{B.1.1}$$

定义 B.1.1 称算子 $\mathscr{L}$ 在 Ω 内是椭圆的, 如果 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ 对所有 $x \in \Omega$ 和 $i, j = 1, \cdots, n$ 都成立, 并且存在 $0 < \lambda(x), \Lambda(x) < \infty$, 使得

$$\lambda(x)|y|^2 \leqslant a_{ij}(x)y_iy_j \leqslant \Lambda(x)|y|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

对于椭圆算子 $\mathscr{L}$, 如果存在常数 $\lambda_0 > 0$ 使得 $\lambda(x) \geqslant \lambda_0$ 对所有 $x \in \Omega$ 都成立, 就称 $\mathscr{L}$ 是严格椭圆的; 如果 $\dfrac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ 在 Ω 内有界, 就称 $\mathscr{L}$ 是一致椭圆的.

B.1.1 古典解的极值原理

本小节总假设下面的三个条件成立:

(A) 算子 $\mathscr{L}$ 在 Ω 内是椭圆的;

(B) $\mathscr{L}$ 的系数在 Ω 内连续;

(C) 在 Ω 内 $\dfrac{|b_i(x)|}{\lambda(x)} \leqslant b_0 < \infty$, $i = 1, \cdots, n$.

定理 B.1.1 (弱极值原理) 假设 $c(x) \geqslant 0$, $\dfrac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 且在 Ω 内满足 $\mathscr{L}u \leqslant 0$. 如果 u 在 $\bar{\Omega}$ 上有非负最大值, 那么这个最大值一定在 $\partial\Omega$ 上达到, 即

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leqslant \max_{\partial\Omega} u^+, \quad 这里 \quad u^+ = \max\{u, 0\}.$$

定理 B.1.2 (Hopf 引理) 假设 B 是一个开球体, $\mathscr{L}$ 在 B 内是一致椭圆的. 又设

(a) $x_0 \in \partial B$, $u \in C(B \cup \{x_0\}) \cap C^2(B)$, $u(x_0) > u(x) \ \ \forall\, x \in B$;

(b) $\mathscr{L}u \leqslant 0$ 在 B 内成立.

如果 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x_0}$ 存在, 只要下列条件之一成立:

(1) $c(x) \equiv 0$;

(2) $u(x_0) \geqslant 0$, $c(x) \geqslant 0$ 并且 $\dfrac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界;

(3) $u(x_0) = 0$, $\dfrac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界;

就有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x_0} > 0$.

定理 B.1.3 (强极值原理) 假设在 Ω 内 $\mathscr{L}$ 是一致椭圆算子, $\mathscr{L}u \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$.

(1) 如果 $c(x) \equiv 0$, u 在 Ω 内达到最大值 (最小值), 则 $u \equiv$ 常数. 换言之, 如果 u 不是常数, 那么 u 在 Ω 的内部达不到最大值 (最小值);

(2) 如果 $c(x) \geqslant 0$ 并且 $\dfrac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界, 除非 u 是常数, 它一定在 Ω 的内部达不到非负最大值 (非正最小值).

定理 B.1.4 假设 Ω 有界, $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{\Omega})$, 算子 $\mathscr{L}$ 在 Ω 内是一致椭圆的, 并且存在一个正函数 $w \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足 $\mathscr{L}w \geqslant 0$. 又设函数 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足 $\mathscr{L}u \leqslant 0$. 如果 u/w 不是常数, 那么 u/w 一定在 Ω 的内部达不到非负最大值.

进一步假设 u/w 不是常数, 并且 u/w 在某点 $x_0 \in \partial\Omega$ 处取得非负最大值. 如果 Ω 在 x_0 点有内球性质, 那么 $\left.\dfrac{\partial}{\partial \nu}\left(\dfrac{u}{w}\right)\right|_{x_0} > 0$.

定理 B.1.5 (整体 Harnack 不等式 [45]) 假设 $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{\Omega})$, 算子 $\mathscr{L}$ 在 Ω 内是一致椭圆的. 如果 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是问题

$$
\begin{cases}
\mathscr{L}u = 0, & x \in \Omega, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega
\end{cases}
$$

的正解. 则存在正常数 $C = C(\lambda, \Lambda, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty)$, 使得

$$
\max_{\bar{\Omega}} u \leqslant C \min_{\bar{\Omega}} u.
$$

定理 B.1.6[46] 设 $g \in C(\bar{\Omega})$, $b_j \in C(\bar{\Omega})$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

(1) 如果 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足

$$
\begin{cases}
\Delta u + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x) u_{x_j} + g(x) \geqslant 0, & x \in \Omega, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant 0, & x \in \partial\Omega,
\end{cases}
$$

并且 $u(x_0)=\max_{\bar\Omega} u$, 那么 $g(x_0)\geqslant 0$.

(2) 如果 $u\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j}+g(x)\leqslant 0, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\geqslant 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

并且 $u(x_0)=\min_{\bar\Omega} u$, 那么 $g(x_0)\leqslant 0$.

B.1.2 弱解的极值原理

定理 B.1.7 ([47, 推论 2]) 假设 $u\in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 在点 $x_0\in\Omega$ 处取到局部最大值. 那么, 存在子集 $A\subset\Omega$, 使得在 A 上古典导数 D_iu 和 $D_{ij}u$ 存在, 并且

$$|A\cap B_r(x_0)|>0,\quad \forall\, r>0,$$

$$\limsup_{A\ni x\to x_0}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}u(x)\leqslant 0,\quad \lim_{A\ni x\to x_0}|\nabla u(x)|=0.$$

定理 B.1.8 (Aleksandrov 弱极值原理, [48, 定理 9.1]) 假设 Ω 有界, 算子 $\mathscr{L}$ 在 Ω 内是椭圆的, $c\geqslant 0$ 并且

$$\frac{b_i}{\det[a_{ij}]},\ \frac{f}{\det[a_{ij}]}\in L^n(\Omega),\ i=1,\cdots,n.$$

如果 $u\in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足 $\mathscr{L}u\leqslant f$, 则

$$\sup_{\Omega} u\leqslant \limsup_{x\to\partial\Omega} u^+ + C\left\|\frac{f}{\det[a_{ij}]}\right\|_n,$$

这里的正常数 C 仅依赖于空间维数 n, $\mathrm{diam}\Omega$ 和 $\|b/\det[a_{ij}]\|_n$.

定理 B.1.9 (弱解的强最大值原理 [48]) 假设在 Ω 内算子 $\mathscr{L}$ 是一致椭圆的, 函数 $b_i(x)/\lambda(x)$ 和 $c(x)/\lambda(x)$ 在 Ω 内有界. 如果 $u\in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足 $\mathscr{L}u\leqslant 0$ 并且 $c=0$ ($c\geqslant 0$), 那么 u 在 Ω 内达不到最大值 (非负最大值), 除非 u 是常数.

定理 B.1.10 (弱解的 Harnack 不等式, [48, 推论 9.25]) 假设在 Ω 内算子 $\mathscr{L}$ 是严格椭圆的且系数有界, 同时存在正常数 γ 和 η, 使得

$$\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}\leqslant\gamma,\quad \left(\frac{b_i(x)}{\lambda(x)}\right)^2\leqslant\eta,\quad \frac{|c(x)|}{\lambda(x)}\leqslant\eta,\quad x\in\Omega.$$

如果 $u\in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 满足 $\mathscr{L}u=0$, $u\geqslant 0$, 则对于任意的球 $B_{2R}(y)\subset\Omega$, 有

$$\sup_{B_R(y)} u\leqslant C'\inf_{B_R(y)} u.$$

这里的常数 $C=C(n,\gamma,\eta R^2)$.

定理 B.1.11 ([2, 定理 2.11]) 定理 B.1.2 对于函数 $u\in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 仍然成立.

B.2 Schauder 理论和 L^p 理论

B.2.1 Schauder 估计

假设条件:

(D) 存在常数 $\Lambda > \lambda > 0$ 使得

$$\lambda|y|^2 \leqslant a_{ij}(x)y_iy_j \leqslant \Lambda|y|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}^n;$$

(E) $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ 并且

$$\frac{1}{\lambda}\left(|a_{ij}|_\alpha + |b_i|_\alpha + |c|_\alpha\right) \leqslant \Lambda_\alpha.$$

定理 B.2.1 (内估计) 假设条件 (D) 和 (E) 成立, $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ $(0 < \alpha < 1)$ 是问题 (B.1.1) 的解. 如果 $f \in C^\alpha(\Omega)$, 则对于任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 我们有

$$|u|_{2+\alpha,\Omega'} \leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}|f|_{\alpha,\Omega} + |u|_{0,\Omega}\right),$$

其中正常数 C 只依赖于 $n, \alpha, \Lambda/\lambda, \Lambda_\alpha$ 和 $d(\Omega', \partial\Omega)$.

定理 B.2.2 (全局估计) 假设条件 (D) 和 (E) 成立, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ 是问题 (B.1.1) 的解, 并且满足 $u|_{\partial\Omega} = 0$. 如果 $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 则

$$|u|_{2+\alpha} \leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}|f|_\alpha + |u|_0\right),$$

其中正常数 C 只依赖于 $n, \alpha, \Lambda/\lambda, \Lambda_\alpha$ 与 Ω.

B.2.2 L^p 估计

假设条件:

(F) $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, 存在常数 λ, $\Lambda > 0$ 使得

$$a_{ij}(x)y_iy_j \geqslant \lambda|y|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|a_{ij}\|_\infty + \|b_i\|_\infty + \|c\|_\infty \leqslant \Lambda.$$

定义

$$\omega(R) = \max_{i,j} \max_{\substack{|x-y| \leqslant R \\ x,y \in \bar{\Omega}}} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|,$$

称之为 a_{ij} 的连续模. 显然, 当 $R \longrightarrow 0$ 时, $\omega(R) \longrightarrow 0$.

定理 B.2.3 (内估计) 假设条件 (F) 成立, $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ 在 Ω 内几乎处处满足方程 (B.1.1), $1 < p < \infty$. 那么对于任给的 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 下面的估计式成立:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_p + \|u\|_p\right),$$

其中正常数 C 只依赖于 n,p, Λ/λ, $d(\Omega',\partial\Omega)$ 与 a_{ij} 的连续模 $\omega(R)$.

定理 B.2.4 (全局估计) 假设条件 (F) 成立, $\partial\Omega\in C^2$, $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ 在 Ω 内几乎处处满足方程 (B.1.1), $1<p<\infty$. 则

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C\Big(\frac{1}{\lambda}\|f\|_p+\|u\|_p\Big),$$

其中正常数 C 只依赖于 n,p, Λ/λ, Ω 与 a_{ij} 的连续模 $\omega(R)$.

注 B.2.1 对于 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -a_{ij}D_{ij}u+b_iD_iu+cu=f, & x\in\Omega,\\ u=\varphi, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{B.2.1}$$

如果边界值函数 φ 可以延拓成 $W^{2,p}(\Omega)$ 中的函数, $u\in W^{2,p}(\Omega)$, $u-\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且几乎处处满足问题 (B.2.1) 中的方程, 则称 u 是 Dirichlet 边值问题 (B.2.1) 的解 (也称这样的解为强解). 若记

$$\|\varphi\|_{W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)}=\inf\left\{\|\Phi\|_{W^{2,p}(\Omega)}:\ \Phi\in W^{2,p}(\Omega),\ \Phi-\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\},$$

那么, 当 $u\in W^{2,p}(\Omega)$ 是问题 (B.2.1) 的强解时, 我们有估计

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C\big(\|f\|_p+\|\varphi\|_{W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)}+\|u\|_p\big),$$

其中正常数 C 只依赖于 $n,p,\Lambda,\lambda,\Omega$ 以及 a_{ij} 的连续模 $\omega(R)$.

B.2.3 解的存在性和估计

考虑边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u=f, & x\in\Omega,\\ a\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+b(x)u=\varphi, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{B.2.2}$$

其中

$$\text{①}\ a=0,\quad b=1;\quad \text{或者}\ \text{②}\ a=1,\quad b(x)\geqslant 0,\quad b(x)\in C(\partial\Omega).$$

定理 B.2.5 (Schauder 理论) 假设条件 (D) 和 (E) 成立, $b\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$, $c(x)\geqslant 0$, 并且 $b(x)+c(x)\not\equiv 0$. 如果 $f\in C^\alpha(\bar\Omega)$, φ 可以延拓成 $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ 中的函数, 那么问题 (B.2.2) 存在唯一解 $u\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$, 并且有估计

$$|u|_{2+\alpha}\leqslant C\big(|f|_\alpha+|\varphi|_{2+\alpha}\big), \tag{B.2.3}$$

其中正常数 C 只依赖于 n,α,λ, Λ, Λ_α, Ω 以及 $|b|_{1+\alpha,\partial\Omega}$. 特别地, 当 $b(x)>0$ 在 $\partial\Omega$ 上恒成立时, 可以只要求 φ 能够延拓成 $C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$ 中的函数, 同时估计式 (B.2.3) 可以换成

$$|u|_{2+\alpha} \leqslant C\big(|f|_\alpha + |\varphi|_{1+\alpha}\big).$$

定理 B.2.6 (L^p 理论) 假设条件 (F) 成立, Ω 有界, $\partial\Omega \in C^2$, $c(x) \geqslant 0$, 并且 $b(x)+c(x) \not\equiv 0$. 如果 $f \in L^p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$, 函数 φ 可以延拓成 $W^{2,p}(\Omega)$ 中的函数, 那么边值问题 (B.2.2) 存在唯一解 $u \in W^{2,p}(\Omega)$, 并且有估计

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\big(\|f\|_p + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\big), \tag{B.2.4}$$

其中正常数 C 只依赖于 n,p, Λ/λ, Ω 和 a_{ij} 的连续模 $\omega(R)$. 特别地, 当 $b(x)>0$ 在 $\partial\Omega$ 上恒成立时, 可以只要求 φ 能够延拓成 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的函数, 同时估计式 (B.2.4) 可以换成

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\big(\|f\|_p + \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}\big).$$

注 B.2.2 在定理 B.2.5 和定理 B.2.6 中, 如果 $c(x) \geqslant 0$ 不成立, 或者 $b(x) = c(x) \equiv 0$, 那么解的存在性还对, 但是唯一性不对. 相应的估计式 (B.2.3) 和 (B.2.4) 分别成为

$$|u|_{2+\alpha} \leqslant C\big(|f|_\alpha + |\varphi|_{2+\alpha} + \|u\|_\infty\big)$$

和

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C\big(\|f\|_p + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|u\|_p\big).$$

参 考 文 献

[1] Ôtani M. Existence and nonexistence of nontrivial solutions of some nonlinear degenerate elliptic equations. J. Funct. Anal., 1988, **76**: 140–159.

[2] Du Y H. Order Structure and Topological Methods in Nonlinear PDEs. Vol. 1. Maximum Principle and Applications. Singapore: World Scientific, 2006.

[3] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论. 北京: 科学出版社, 1999.

[4] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1985.

[5] Berestycki H, Nirenberg L, Varadhan S R S. The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains. Comm. Pure Appl. Math., 1994, **XLVII**: 47–92.

[6] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. I, II. Wiley-Interscience, 1948, 1962 (中译本: 库朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法 I. 北京: 科学出版社, 1958; 数学物理方法 II. 北京: 科学出版社, 1977).

[7] Ni W M, Wang X F. On the first positive Neumann eigenvalue. Discrete Conti. Dyn. Syst., 2007, **17**(1): 1–19.

[8] Giorgi T, Smits R G. Monotonicity results for the principal eigenvalue of the generalized robin problem. Illinois J. Math., 2005, **49**(4): 1133–1143.

[9] Ladde G S, Lakshmikantham V, Vatsala A S. Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations. Boston: Pitman, 1985.

[10] 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 北京: 科学出版社, 2003.

[11] Dancer E N. On the number of positive solutions of weakly nonlinear elliptic equations when a parameter is large. Proc. London Math. Soc., 1986, **53**: 429–452.

[12] Kadota T, Kuto K. Positive steady states for a prey-predator model with some nonlinear diffusion terms. J. Math. Anal. Appl., 2006, **323**: 1387–1401.

[13] Ko W, Ryu K. On a predator-prey system with cross diffusion representing the tendency of predators in the presence of prey species. J. Math. Anal. Appl., 2008, **341**: 1133–1142.

[14] Pao C V. Strongly coupled elliptic systems and applications to lotka-volterra models with cross-diffusion. Nonlinear Analysis, 2005, **60**: 1197–1217.

[15] Showalter R E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. Math. Surveys and Monographs, **49**, Amer. Math. Soc., 1997.

[16] 郭大钧. 非线性泛函分析. 第二版. 济南: 山东科学技术出版社, 2003.

[17] Amann H, Crandall M G. On some existence theorems for semi-linear elliptic equations. Indiana Univ. Math. J., 1978, **27**: 779–790.

[18] 王明新. 非线性抛物型方程. 北京: 科学出版社, 1993.

[19] Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001.

[20] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 (上册). 北京: 北京大学出版社, 1987.

[21] Dancer E N. On the indices of fixed points of mappings in cones and applications. J. Math. Anal. Appl., 1983, **91**: 131–151.

[22] Ruan W H, Feng W. On the fixed point index and multiple steady states of reaction-diffusion systems. Differential and Integral Equations, 1995, **8**: 371–391.

[23] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. New York: Springer, 1966.

[24] Du Y H, Lou Y. Some unqiueness and exact multiplicity results for a predator-prey model. Trans. Amer. Math. Soc., 1997, **349**(6): 2443–2475.

[25] Peng R, Wang M X. On multiplicity and stability of positive solutions of a diffusive prey-predator model. J. Math. Anal. Appl., 2006, **316**: 256–268.

[26] Turing A. The chemical basis of morphogenesis. Philos. Trans. Royal Soc. B, 1952, **237**: 37–72.

[27] Pang P Y H, Wang M X. Strategy and stationary pattern in a three-species predator-prey model. J. Differential Equations, 2004, **200**(2): 245–273.

[28] Hall J K. Ordinary Differential Equations. Krieger, Malabar FL, 1980.

[29] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics **840**. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1993.

[30] Brown K J, Dunne P C, Gardner R A. A semilinear parabolic system arising in the theory of superconductivity. J. Differential Equations, 1981, **40**: 232–252.

[31] Du Y H, Pang P Y H, Wang M X. Qualitative analysis of a prey-predator model with stage structure for the predator. SIAM J. Math. Anal., 2008, **69**(2): 596–620.

[32] Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **95**: 101–123.

[33] Brown K J, Zhang Y P. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. J. Differential Equations, 2003, **193**: 481–499.

[34] Yang G Y, Wang M X. Existence of multiple positive solutions for a p-Laplacian system with sign-changing weight functions. Comput. Math. Appl., 2008, **55**(4): 636–653.

[35] Pohozaev S I. On fibering method for the solutions of nonlinear boundary value problems. Trudy Mat. Inst. Steklov, 1990, **192**: 146–163 (in Russian).

[36] Bozhkov Y, Mitidieri E. Existence of multiple solutions for quasilinear systems via fibering method. J. Differential Equations, 2003, **190**: 239–267.

[37] Drabek P, Pohozaev S I. Positive solutions for the p-Laplacian: Application of the fibrering method. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1997, **A127**: 703–726.

[38] García-Melián J, Sabina de Lis J. Maximum and comparison principles for operators invoving the p-Laplacian. J. Math. Anal. Appl., 1998, **218**: 49–65.

[39] Vázquez J L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. Appl. Math. Optim., 1984, **12**: 191–202.

[40] Trudinger N S. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math., 1967, **XX**: 721–747.

[41] Anello G. On the Dirichlet problem involving the equation$-\Delta_p u = \lambda u^{s-1}$. Nonlinear Analysis, 2009, **70**: 2060–2066.

[42] Cañada A, Drábek P, Gámez J L. Existence of positive solution for some problems with nonlinear diffusion. Trans. Amer. Math. Soc., 1997, **10**: 4231–4249.

[43] 王明新. 索伯列夫空间 (讲义). 哈尔滨, 2009.

[44] 王明新. 偏微分方程基本理论. 北京: 科学出版社, 2009.

[45] Lin C S, Ni W M, Takagi I. Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis systems. J. Differential Equations, 1988, **72**: 1–27.

[46] Lou Y, Ni W M. Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion. J. Differential Equations, 1996, **131**: 79–131.

[47] Lions P L. A remark on Bony's maximum principle. Proc. Amer. Math. Soc., 1983, **88**: 503–508.

[48] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order. New York: Springer-Verlag, 2001.

索引

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1　数理逻辑基础（上册）　1981.1　胡世华、陆钟万　著
2　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙、吕以辇、陈志华　著
3　组合论（上册）　1981.10　柯　召、魏万迪　著
4　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
5　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭、方开泰　著
6　概率论基础　1982.8　严士健、王隽骧、刘秀芳　著
7　数理逻辑基础（下册）　1982.8　胡世华、陆钟万　著
8　群构造（上册）　1982.11　张远达　著
9　有限群构造（下册）　1982.12　张远达　著
10　环与代数　1983.3　刘绍学　著
11　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
12　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
13　巴拿赫空间引论　1984.8　定光桂　著
14　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜　著
15　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久等　编
16　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔、邹异明　著
17　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　著
18　算子代数　1986.6　李炳仁　著
19　线性偏微分算子引论（上册）　1986.8　齐民友　著
20　实用微分几何引论　1986.11　苏步青等　著
21　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
22　线性代数群表示导论（上册）　1987.2　曹锡华等　著
23　模型论基础　1987.8　王世强　著
24　递归论　1987.11　莫绍揆　著
25　有限群导引(上册)　1987.12　徐明曜　著
26　组合论（下册）　1987.12　柯　召、魏万迪　著
27　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李　忠　著
28　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　著
29　同调代数　1988.2　周伯壎　著

30　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著

31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著

32　代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青、段海鲍译

33　非线性发展方程　1989.12　李大潜、陈韵梅　著

34　反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著

35　仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编

36　公理集合论导引　1991.1　张锦文　著

37　解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著

38　拓扑群引论　1991.3　黎景辉、冯绪宁　著

39　二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙、吴兰成　著

40　黎曼曲面　1991.4　吕以辇、张学莲　著

41　线性偏微分算子引论（下册）　1992.1　齐民友　著

42　复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著

43　Banach 代数　1992.11　李炳仁　著

44　随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著

45　丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著

46　线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲、马如云　著

47　广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬、赵晓华、刘正荣　著

48　线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著

49　单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著

50　复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著

51　组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著

52　Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英、李冲、杨文善　著

53　有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先、霍元极　著

54　实分析导论　1998.2　丁传松等　著

55　对称性分岔理论基础　1998.3　唐　云　著

56　Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著

57　半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著

58　有限群导引(下册)　1999.5　徐明曜等　著

59　随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著

60　非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著

61　复合算子理论　1999.8　徐宪民　著

62　离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著

63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著

64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德、郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪　林、杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军、张　祥、董梅芳　编著
71　随机分析学基础（第二版）　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚、马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎、陆传荣、张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯、顾凡及、蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒、李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川、崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙、李登峰、谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李　雷、吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘　文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群、尹景学、王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格（第二版）　2003.10　万哲先、霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版）　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩、周义仓、王稳地、靳　祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正、刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1　王玉文 著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰 著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林、闫宝强、刘衍胜　著
97　代数学中的 Frobenius 结构　2005.7　汪明义　著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与Banach空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

132　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著

133　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著

134　算子代数与非交换 L_p 空间引论　2010.5　许全华、吐尔德别克、陈泽乾　著

135　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著